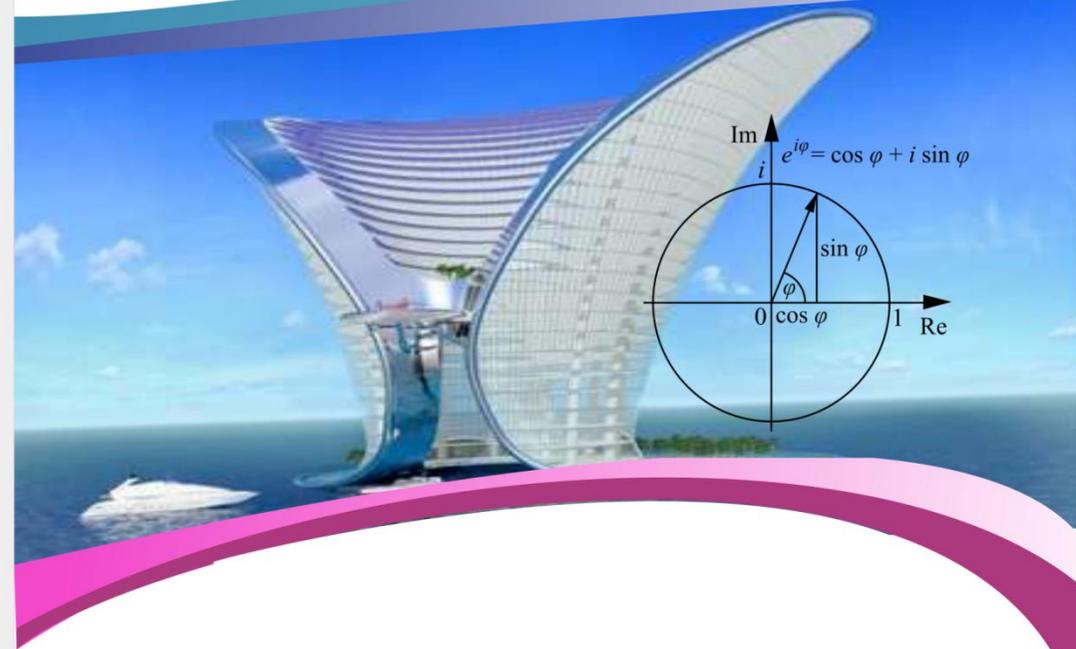




MUHAMMAD FAJZAL AMIR, M.Pd
 BAYU HARI PRASOJO, S.Si., M.Pd.

BUKU AJAR MATEMATIKA DASAR (EDISI REVISI)



Buku Ajar Matematika Dasar

Edisi Revisi



UMSIDA PRESS
 Jl. Mojopahit 666 B Sidoarjo



UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH SIDOARJO
 2017

**BUKU AJAR
MATEMATIKA DASAR**

Penulis

Mohammad Faizal Amir, M.Pd

Bayu Hari Prasajo, S.Si., M.Pd



Diterbitkan oleh

UMSIDA PRESS

Jl. Mojopahit 666 B Sidoarjo

ISBN: 978-979-3401-66-9

Copyright©2017.

Authors

All rights reserved

BUKU AJAR
MATEMATIKA DASAR

Penulis :

Mohammad Faizal Amir, M.Pd
Bayu Hari Prasajo, S.Si., M.Pd

ISBN :

978-979-3401-66-9

Editor :

Septi Budi Sartika, M.Pd

M. Tanzil Multazam , S.H., M.Kn.

Copy Editor :

Fika Megawati, S.Pd., M.Pd.

Design Sampul dan Tata Letak :

Mochamad Nashrullah, S.Pd

Penerbit :

UMSIDA Press

Redaksi :

Universitas Muhammadiyah Sidoarjo
Jl. Mojopahit No 666B
Sidoarjo, Jawa Timur

Cetakan kedua, Agustus 2017

© Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dengan suatu apapun
tanpa ijin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala anugerah dan rahmat-Nya, sehingga Buku Ajar Matematika Dasar edisi revisi untuk Tingkat Perguruan Tinggi ini dapat terselesaikan dengan baik.

Buku ajar Matematika Dasar ini terdiri dari 9 Bab Materi Perkuliahan, yang terdiri dari (1) Sistem Bilangan Real; (2) Himpunan; (3) Persamaan dan Pertidaksamaan Linear; (4) Fungsi; (5) Matriks; (6) Persamaan dan Pertidaksamaan Nilai Mutlak; (7) Limit dan Kekontinuan; (8) Turunan; (9) Integral. Materi ini merupakan satu kesatuan materi yang dipelajari oleh mahasiswa secara menyeluruh dan tak terpisahkan selama satu semester karena merupakan satu kesatuan yang utuh dalam Capaian Kompetensi di Rencana Pembelajaran Semester .

Tujuan diterbitkan buku ini untuk membantu mahasiswa agar dapat menguasai konsep matematika dasar secara mudah, dan utuh. Di samping itu pula, buku ini dapat digunakan sebagai acuan bagi dosen yang mengampu mata kuliah Matematika Dasar ataupun mata kuliah matematika yang lain. Isi buku ini memuat 5 komponen utama yaitu; pendahuluan, penyajian materi, rangkuman, latihan dan daftar pustaka. Buku Ajar Matematika Dasar Edisi Revisi untuk

Tingkat Perguruan Tinggi ini diterbitkan oleh UMSIDA Press. Buku Ajar ini merupakan buku terbitan edisi kedua setelah adanya perbaikan revisi dan penambahan materi dari edisi. Saran dan masukan oleh para pengguna sangat kami harapkan untuk kesempurnaan isi buku ajar ini di masa yang akan datang.

Semoga Buku Ajar ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa, dosen dan siapa saja yang menggunakannya untuk kemajuan pendidikan di Universitas Muhammadiyah Sidoarjo (UMSIDA) khususnya dan kemajuan pendidikan di Indonesia pada umumnya.

Sidoarjo, September 2017

Tim Penyusun

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii

BAB I SISTEM BILANGAN REAL

A. Pendahuluan	1
B. Himpunan Bilangan.....	1
C. Bentuk Pangkat Akar dan Logaritma.....	5
D. Rangkuman	17
E. Latihan	20

BAB II HIMPUNAN

A. Pendahuluan	22
B. Pengertian Himpunan	22
C. Keanggotaan Himpunan dan Bilangan	25
D. Penulisan Himpunan.....	26
E. Macam-macam Himpunan	30
F. Relasi Antar Himpunan	32
G. Operasi Himpunan.....	37
H. Sifat-sifat Operasi pada Himpunan	42
I. Rangkuman	43
J. Latihan	49

BAB III PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINIER

A. Pendahuluan	51
B. Persamaan Linier Satu Variabel	52
C. Persamaan Ekuivalen	54
D. Persamaan Linier Bentuk Pecahan Satu Variabel	55
E. Pertidaksamaan Linier Satu Variabel	56
F. Pertidaksamaan Linier Bentuk Pecahan Satu Variabel	59
G. Rangkuman	60
H. Latihan	62

BAB IV FUNGSI

A. Pendahuluan	64
B. Pengertian Fungsi	64
C. Sifat Fungsi	66
D. Jenis Fungsi.....	69

E.	Rangkuman	80
F.	Latihan	84
BAB V MATRIKS		
A.	Pendahuluan	87
B.	Pengertian Matriks	87
C.	Jenis-jenis Matriks.....	89
D.	Operasi dan Sifat-sifat Matriks	91
E.	Determinan	97
F.	Invers Matriks	102
G.	Rangkuman	104
H.	Latihan	110
BAB VI PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN NILAI MUTLAK		
A.	Pendahuluan	112
B.	Pengertian Nilai Mutlak	112
C.	Persamaan dan Pertidaksamaan Nilai Mutlak.....	113
D.	Rangkuman	124
E.	Latihan	125
BAB VII LIMIT DAN KEKONTINUAN		
A.	Pendahuluan	126
B.	Pengertian Limit	126
C.	Sifat-sifat Limit	128
D.	Limit Bentuk Tak Tentu	131
E.	Limit Bentuk Trigonometri	135
F.	Kekontinuan	136
G.	Rangkuman	138
H.	Latihan	140
BAB VIII TURUNAN		
A.	Pendahuluan	141
B.	Pengertian Turunan	141
C.	Aturan-aturan Turunan	144
D.	Turunan Trigonometri	147
E.	De L'Hospital	149
F.	Aturan Rantai	151
G.	Turunan Tingkat Tinggi	153
H.	Rangkuman	155
I.	Latihan	158

BAB IX INTEGRAL

A. Pendahuluan	160
B. Integral Sebagai Anti Turunan.....	160
C. Rumus Dasar Integral.....	162
D. Teknik Integral Substitusi.....	168
E. Integral Parsial.....	174
F. Integral Tentu	176
G. Rangkuman	177
H. Latihan	179
DAFTAR PUSTAKA	182
INDEKS MATERI.....	184
BIODATA PENULIS.....	188

BAB I

SISTEM BILANGAN REAL

A. Pendahuluan

Dalam Matematika Dasar terdapat konsep dari himpunan obyek-obyek, khususnya tentang konsep himpunan dari bilangan-bilangan yang banyak sekali diterapkan untuk matematika lebih lanjut maupun penerapan di bidang-bidang yang lain. Himpunan bilangan yang penting untuk diketahui adalah himpunan bilangan Asli, himpunan bilangan Cacah, himpunan bilangan Bulat, himpunan bilangan Rasional, himpunan bilangan Irrasional (tak terukur), dan himpunan bilangan Real. Sifat-sifat dari bilangan ini akan digunakan dalam Bentuk Pangkat, Penarikan Akar, dan Logaritma.

Diharapkan mahasiswa dapat memahami konsep himpunan bilangan yang penting untuk diketahui dan mampu menggunakan sifat-sifat dari himpunan bilangan diantaranya yaitu Bentuk Pangkat, Penarikan Akar, dan Logaritma.

B. Himpunan Bilangan

Konsep dari himpunan obyek-obyek yang paling penting dipelajari untuk matematika lebih lanjut adalah konsep dari himpunan bilangan-bilangan. Beberapa konsep dari himpunan bilangan-bilangan tersebut diantaranya adalah

himpunan bilangan Asli, himpunan bilangan Cacah, himpunan bilangan Bulat, himpunan bilangan Rasional, himpunan bilangan Irrasional (tak terukur), dan himpunan bilangan Real.

1. Himpunan bilangan Asli atau disebut juga himpunan bilangan bulat positif dapat ditulis sebagai : $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.
2. Himpunan bilangan Cacah ditulis : $\mathbf{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.
3. Himpunan bilangan Bulat ditulis : $\mathbf{I} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
4. Himpunan bilangan Rasional / Terukur ditulis :

$$\mathbf{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbf{I}, b \neq 0 \right\} \text{ yaitu bilangan yang}$$

dapat dinyatakan sebagai hasil bagi antara dua bilangan bulat (pecahan) dengan syarat bahwa nilai penyebut tidak sama dengan nol, contoh : $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, -\frac{5}{7}$ dan sebagainya.

Dengan demikian bilangan rasional adalah bilangan yang dapat ditulis dalam bentuk pecahan $\frac{a}{b}$ dengan a dan b bilangan bulat dan $b \neq 0$. Adapun himpunan bilangan rasional terdiri dari bilangan bulat, bilangan pecahan murni, dan bilangan pecahan desimal.

5. Himpunan bilangan Irrasional (tak terukur) ditulis :
 $Q' = \{x \mid x \in Q\}$ yaitu bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai hasil bagi antara dua bilangan bulat (pecahan), tapi dapat dinyatakan dengan bilangan desimal tak tentu atau tak berulang, misalnya : $e = 2,71828\dots$, $\pi = 3,14159\dots$, $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ dan lain sebagainya.
6. Himpunan bilangan Real (nyata) ditulis :
 $R = \{x \mid x \text{ bilangan Real}\}$. Bilangan rasional dan Irrasional merupakan himpunan bilangan real.

Dengan demikian, himpunan bilangan Asli adalah subset dari himpunan bilangan Cacah. Himpunan bilangan Cacah adalah subset dari himpunan bilangan Rasional. Sedangkan himpunan bilangan baik Rasional maupun Irrasional disebut himpunan bilangan Real. Himpunan bilangan yang tidak Real adalah himpunan bilangan Imaginer ataupun himpunan bilangan Kompleks. Himpunan-himpunan bilangan di atas dapat ditulis dalam bentuk subset sebagai berikut :

$$N \subset W \subset I \subset Q \subset R$$

Sifat Ketidaksamaan Bilangan Real

- Sembarang bilangan Real a dan b , dapat terjadi salah satu dari tiga hal yaitu : $a < b$, $b < a$, atau $a = b$.
- Jika $a < b$ dan $b < c$ maka $a < c$.
- Jika $a < b$, maka $a + c < b + c$ untuk sembarang nilai c .

d. Jika $a < b$ dan $c > 0$ maka $ac < bc$.

e. Jika $a < b$ dan $c < 0$ maka $ac > bc$.

Sistem bilangan Real dibentuk atas dasar sistem bilangan Asli, di mana semua sifat-sifatnya dapat diturunkan. Jika x , y , dan z adalah bilangan Real maka sifat-sifat bilangan Real adalah :

a. Sifat komutatif untuk penjumlahan

$$x + y = y + x$$

b. Sifat komutatif untuk perkalian

$$x \cdot y = y \cdot x$$

c. Sifat asosiatif untuk penjumlahan

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

d. Sifat asosiatif untuk perkalian

$$x (yz) = (xy) z$$

e. Sifat distributif

$$x (y + z) = xy + xz$$

f. Jika x dan y dua bilangan Real, maka terdapat suatu bilangan Real z sehingga $x + z = y$. Bilangan z ini kita nyatakan dengan $y - x$ dan disebut selisih dari y dan x . Selisih $x - x$ kita nyatakan dengan simbol 0 . Simbol 0 ini selanjutnya disebut nol.

g. Terdapat paling sedikit satu bilangan real $x \neq 0$. Jika x dan y dua bilangan Real dengan $x \neq 0$, maka terdapat suatu

bilangan Real z demikian sehingga $x.z = y$. Bilangan z ini kita nyatakan dengan $\frac{y}{x}$ dan disebut hasil bagi dari y dan x . Hasil bagi x dan x dinyatakan dengan simbol 1 , yang selanjutnya disebut satu dan tidak bergantung pada x .

C. Bentuk Pangkat, Akar dan Logaritma

1. Bentuk Pangkat Bulat

Definisi

Fungsi notasi pangkat salah satunya adalah untuk menyederhanakan penulisan atau meringkas penulisan. Contoh, 10.000.000,- dapat ditulis dengan notasi pangkat 10^7 . Notasi pangkat dapat menghemat tempat, sehingga notasi pangkat banyak digunakan dalam perumusan dan menyederhanakan perhitungan.

Pangkat Bulat Positif

Perkalian berulang dari suatu bilangan dapat dinyatakan dalam bentuk bilangan berpangkat bilangan bulat positif.

Contoh:

$$2 = 2^1$$

$$2 \cdot 2 = 2^2$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$$

Bentuk 2^6 dibaca “dua pangkat enam”. 2^6 disebut bilangan berpangkat bulat positif. Bilangan 2 disebut bilangan pokok atau bilangan dasar dan bilangan 6 yang ditulis agak di atas disebut pangkat atau eksponen. Secara umum bilangan berpangkat dapat ditulis :

Jika a bilangan real atau $a \in R$ dan n bilangan bulat positif, maka $a^n = a.a.a.a....a$
 a disebut bilangan pokok dan n disebut pangkat.

Contoh 1.1

1. $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
2. $64 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$
3. $648 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^4$
4. $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

Contoh 1.2

Tentukan nilai dari persamaan berikut untuk nilai variabel yang ditentukan.

1. $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ untuk $x = 2$
 $(2)^3 + 2(2)^2 + 3(2) + 4 = 8 + 8 + 6 + 4 = 26$
2. $3x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4y^3$ untuk $x = -1$ dan $y = 2$
 $3(-1)^3 + 2(-1)^2(2) + 3(-1)(2)^2 + 4(2)^3 = -3 + 4 - 12 + 32 = 21$

Sifat-sifat Pangkat Bulat Positif

Pada bilangan berpangkat bulat positif dapat dilakukan beberapa operasi aljabar seperti : perkalian, pemangkatan, dan pembagian untuk bilangan berpangkat bulat positif. Perhatikan teorema-teorema untuk bentuk perkalian, pemangkatan, dan pembagian dari bilangan berpangkat bulat positif berikut:

- a. Jika a bilangan real, p dan q adalah bilangan bulat positif maka

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

- b. Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p dan q bilangan bulat positif maka

$$a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q} = \begin{cases} a^{p-q} & ; \text{jika } p > q \\ \frac{1}{a^{q-p}} & ; \text{jika } q > p \\ 1 & ; \text{jika } p = q \end{cases}$$

- c. Jika a bilangan real, p dan q bilangan bulat positif maka

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q} = a^{pq}$$

- d. Jika a dan b bilangan real, p bilangan bulat maka

$$(ab)^p = a^p b^p$$

Contoh 1.3

Sederhanakan :

1. $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

2. $x^2 \cdot x^6 = x^{2+6} = x^8$

$$3. (2x^3 y)(-3x^2 y^3) = 2(-3)x^{3+2}y^{1+3} = -6x^5 y^4$$

Contoh 1.4

Kalikanlah $(2x^2 y + 3xy^2)$ dengan $-4x^3 y^2$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned} (2x^2 y + 3xy^2)(-4x^3 y^2) &= 2(-4)x^{2+3}y^{1+2} + 3(-4)x^{1+3}y^{2+2} \\ &= -8x^5 y^3 - 12x^4 y^4 \end{aligned}$$

Pangkat Bulat Negatif dan Nol

Jika pada bentuk perpangkatan pangkat dari bilangan dasar kurang dari satu dan nol maka akan diperoleh pangkat bilangan bulat negatif dan nol.

Contoh 1.5

$$3^{-1}; 3^{-2}; 3^{-3}; 3^{-4}; 3^{-5}; \text{ dan } 3^0$$

$$a^{-1}; a^{-2}; a^{-3}; a^{-4}; a^{-5}; \dots; a^{-n}; \text{ dan } a^0$$

Untuk mendefinisikan a^n dengan a bilangan real dan n bilangan bulat negatif dan nol, maka dapat digunakan teorema-teorema perpangkatan pada bilangan bulat positif, seperti :

$$\frac{a^n}{a^n} = 1. \text{ Jika teorema } \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \text{ digunakan maka akan}$$

$$\text{diperoleh } \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1 \text{ dan untuk } q = p + n \text{ maka}$$

$$\text{diperoleh } \frac{a^p}{a^q} = \frac{a^p}{a^{p+n}} = a^{p-(p+n)} = a^{-n}.$$

Dengan demikian maka terdapat teorema berikut,

Jika $a \neq 0$, a bilangan real dan n bilangan bulat positif maka

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ dan } a^0 = 1.$$

2. Bentuk Akar

Tanda akar dinotasikan dengan “ $\sqrt{\quad}$ ” bentuk akar atau $\sqrt{\quad}$ menyatakan akar pangkat dua yaitu merupakan kebalikan dari kuadrat. Pernyataan yang ditulis dengan tanda akar disebut bentuk akar.

Contoh 1.6

1. Karena $5^2 = 25$ maka $\sqrt{25} = 5$
2. Karena $8^2 = 64$ maka $\sqrt{64} = 8$

Contoh 1.7

Bentuk-bentuk berikut merupakan contoh bentuk akar :

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{21}$ dan sebagainya.

Operasi aljabar seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dapat juga dilakukan terhadap bentuk akar. Operasi tersebut digunakan untuk merasionalkan penyebut yang dinyatakan dalam bentuk akar. Operasi-operasi aljabar tersebut adalah sebagai berikut :

a. $a\sqrt{x} + b\sqrt{x} = (a + b)\sqrt{x}$

$$\text{b. } a\sqrt{x} - b\sqrt{x} = (a - b)\sqrt{x}$$

$$\text{c. } \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\text{d. } \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a$$

$$\text{e. } \sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\text{f. } \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}\sqrt{d}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{cd}}$$

Contoh 1.8

Sederhanakanlah.

$$1. 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (3 + 4)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

$$2. \sqrt{8} + \sqrt{32} = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (2 + 4)\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$3. \sqrt{32} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{32 \cdot 8} = \sqrt{256} = 16$$

$$4. \sqrt{32} : \sqrt{8} = \sqrt{\frac{32}{8}} = \sqrt{4} = 2$$

$$5. \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 10}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

Merasionalkan Pecahan Bentuk Akar

Suatu pecahan yang penyebutnya mengandung bentuk akar dapat disederhanakan bentuknya dengan cara merasionalkan bentuk akar yang ada pada penyebutnya.

Untuk merasionalkan bentuk pecahan dari penyebut tersebut maka pembilang dan penyebut harus dikalikan

dengan bentuk rasional dari bentuk akar yang ada pada penyebutnya. Di bawah ini bentuk-bentuk rumusan untuk penyederhanaan pecahan yang mengandung bentuk akar :

$$\text{a. } \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\text{b. } \frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a}{b+\sqrt{c}} \cdot \frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$$

$$\text{c. } \frac{a}{b-\sqrt{c}} = \frac{a}{b-\sqrt{c}} \cdot \frac{b+\sqrt{c}}{b+\sqrt{c}} = \frac{a(b+\sqrt{c})}{b^2-c}$$

$$\text{d. } \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$$

$$\text{e. } \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$$

Contoh 1.9

Rasionalkan penyebut pecahan berikut :

$$1. \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$2. \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{4-4\sqrt{3}+3}{4-3} = \frac{7-4\sqrt{3}}{1} = 7-4\sqrt{3}$$

3. Pangkat Pecahan

Definisi

Bilangan real a yang memenuhi persamaan $a^n = b$, disebut akar pangkat n dari b dan ditulis dengan $a = \sqrt[n]{b}$. Akar pangkat n dari b atau $\sqrt[n]{b}$ dapat juga ditulis sebagai bilangan berpangkat pecahan yaitu $b^{\frac{1}{n}}$. Demikian juga sebaliknya, bilangan berpangkat pecahan yaitu $b^{\frac{1}{n}}$ dapat ditulis sebagai akar pangkat n dari b atau $\sqrt[n]{b}$. Jadi $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$.

Jika b bukanlah pangkat n dari suatu bilangan rasional maka penentuan dari $\sqrt[n]{b}$ hasilnya akan merupakan bilangan Irrasional. Jika nilai realnya diperlukan maka sebaiknya menggunakan alat hitung seperti kalkulator atau komputer.

Jika m dan n adalah bilangan asli dengan $n \neq 1$ dan a adalah bilangan real yang tidak negatif maka :

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ dan } \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$$
$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}} \right)^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

Contoh 1.10

Sifat-sifat Pangkat Pecahan

- a. Jika a adalah bilangan real, p dan q adalah bilangan rasional maka

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

- b. Jika a adalah bilangan real, p dan q adalah bilangan rasional maka

$$a^p : a^q = a^{p-q}$$

- c. Jika a adalah bilangan real, p dan q adalah bilangan rasional maka

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

- d. Jika a adalah bilangan real, $a \neq 0$ dan p adalah bilangan rasional maka

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

- e. Jika a dan b adalah bilangan real, p , q , dan r adalah bilangan rasional maka

$$(a^p \cdot b^q)^r = (a^p)^r (b^q)^r = a^{pr} \cdot b^{qr}$$

- f. Jika a dan b adalah bilangan real, $b \neq 0$ dan p , q , dan r adalah bilangan rasional maka :

$$\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^r = \frac{a^{pr}}{b^{qr}}$$

4. Logaritma

Definisi

Logaritma merupakan invers atau kebalikan dari eksponen atau perpangkatan. Misalnya $3^2 = 9$ dapat ditulis dengan

$${}^3\log 9 = 2; 3^{-1} = \frac{1}{3} \text{ dapat ditulis dengan } {}^3\log \frac{1}{3} = -1.$$

Dengan demikian bentuk logaritma secara umum ditulis :

Jika $a^n = b$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$ maka ${}^a\log b = p$

Pengertian dari penulisan ${}^a\log b$, a disebut bilangan pokok logaritma. Nilai a harus positif dan $\neq 1$. Jika bilangan pokok bernilai 10, maka bilangan pokok 10 ini biasanya tidak ditulis. Misalkan ${}^{10}\log b = \log b$.

Jika bilangan pokoknya e atau bilangan euler dimana $e = 2,718281828$ maka nilai logaritma dinyatakan dengan \ln yaitu singkatan dari logaritma natural.

Misal : ${}^e\log b = \ln b$

Contoh 1.11

1. Jika $2^3 = 8$ maka ${}^2\log 8 = 3$
2. Jika $3^{-2} = \frac{1}{9}$ maka ${}^3\log \frac{1}{9} = -2$
3. Jika $10^4 = 10.000$ maka $\log 10.000 = 4$
4. Jika $10^{-2} = 0,01$ maka $\log 0,01 = -2$

Sifat-sifat Logaritma

Sifat-sifat logaritma digunakan untuk menyederhanakan bentuk pernyataan dalam logaritma dan juga dapat membantu dalam penentuan nilai logaritmanya. Berikut ini adalah sifat-sifat logaritma :

a. Logaritma dari perkalian

$${}^a\log MN = {}^a\log M + {}^a\log N, \text{ dimana } a > 0, a \neq 1, M > 0 \\ \text{dan } N > 0$$

Contoh 1.12

1. $\log 20 + \log 5 = \log (20 \cdot 5) = \log 100 = 2$

2. Jika $\log 2 = 0,3010$ dan $\log 3 = 0,4771$ maka tentukan $\log 6$!

$$\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0,3010 + 0,4771 = \\ 0,7781$$

b. Logaritma dari pembagian

$${}^a\log \frac{M}{N} = {}^a\log M - {}^a\log N, \text{ dimana } a > 0, a \neq 1, M > 0 \\ \text{dan } N > 0$$

Contoh 1.13

1. ${}^2\log 48 - {}^2\log 3 = {}^2\log (48/3) = {}^2\log 16 = 4$

2. Jika $\log 2 = 0,3010$ dan $\log 3 = 0,4771$ maka tentukan $\log 1,5$!

$$\log 1,5 = \log (3/2) = \log 3 - \log 2 = 0,4771 - 0,3010 = \\ 0,1761$$

c. Logaritma dari perpangkatan

$${}^a \log M^p = p {}^a \log M, \text{ dimana } a > 0, a \neq 1, M > 0$$

Contoh 1.14

1. ${}^2 \log 27 = {}^2 \log 3^3 = 3 {}^2 \log 3$

2. Jika $\log 2 = 0,3010$ dan $\log 3 = 0,4771$ maka tentukan $\log 36$!

$$\begin{aligned} \log 36 &= \log (2^2 \cdot 3^2) = \log 2^2 + \log 3^2 = 2 \log 2 + 2 \log 3 \\ &= 2 (0,3010) + 2 (0,4771) = 0,6020 \\ &\quad + 0,9542 = 1,5562 \end{aligned}$$

d. Mengubah basis logaritma

$${}^M \log N = \frac{{}^a \log N}{{}^a \log M}, \text{ dimana } a > 0, a \neq 1, M > 0 \text{ dan}$$

$$N > 0$$

Contoh 1.15

1. ${}^3 \log 5 = \frac{{}^2 \log 5}{{}^2 \log 3}$

2. Jika $\log 2 = 0,3010$ dan $\log 3 = 0,4771$ maka tentukan ${}^2 \log 3$!

$${}^2 \log 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0,4771}{0,3010} = 1,5850$$

e. Perpangkatan dengan logaritma

$$a^{a \log M} = M, \text{ dimana } a > 0, a \neq 1, M > 0$$

Contoh 1.16

1. $2^{2\log 3} = 3$

2. $8^{2\log 3} = (2^3)^{2\log 3} = 2^{2\log 3^3} = 3^3 = 27$

D. Rangkuman

1. Himpunan bilangan Real (nyata) ditulis :

$R = \{x \mid x \text{ bilangan Real}\}$ Bilangan rasional dan Irrasional merupakan himpunan bilangan real.

2. Sifat Ketidaksamaan Bilangan Real

a. Sembarang bilangan Real a dan b , dapat terjadi salah satu dari tiga hal yaitu : $a < b$, $b < a$, atau $a = b$.

b. Jika $a < b$ dan $b < c$ maka $a < c$.

c. Jika $a < b$, maka $a + c < b + c$ untuk sembarang nilai c .

d. Jika $a < b$ dan $c > 0$ maka $ac < bc$.

e. Jika $a < b$ dan $c < 0$ maka $ac > bc$

3. Pangkat Bulat Positif

Jika a bilangan real atau $a \in R$ dan n bilangan bulat positif, maka

$$a^n = a.a.a.a\dots a$$

a disebut bilangan pokok dan n disebut pangkat

4. Sifat Pangkat Bulat Positif

a. Jika a bilangan real, p dan q adalah bilangan bulat positif maka

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

b. Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, p dan q bilangan bulat positif maka

$$a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q} = \begin{cases} a^{p-q} & ; \text{jika } p > q \\ \frac{1}{a^{q-p}} & ; \text{jika } q > p \\ 1 & ; \text{jika } p = q \end{cases}$$

c. Jika a bilangan real, p dan q bilangan bulat positif maka

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q} = a^{pq}$$

d. Jika a dan b bilangan real, p bilangan bulat maka

$$(ab)^p = a^p b^p$$

5. Pangkat Bulat Negatif dan Nol

Jika $a \neq 0$, a bilangan real dan n bilangan bulat positif maka

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ dan } a^0 = 1$$

6. Operasi aljabar pada bentuk akar

a. $a\sqrt{x} + b\sqrt{x} = (a+b)\sqrt{x}$

b. $a\sqrt{x} - b\sqrt{x} = (a-b)\sqrt{x}$

c. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

d. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a$

e. $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

f. $\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}\sqrt{d}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{cd}}$

7. Merasionalkan pecahan bentuk akar

$$\text{a. } \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\text{b. } \frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a}{b+\sqrt{c}} \cdot \frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$$

$$\text{c. } \frac{a}{b-\sqrt{c}} = \frac{a}{b-\sqrt{c}} \cdot \frac{b+\sqrt{c}}{b+\sqrt{c}} = \frac{a(b+\sqrt{c})}{b^2-c}$$

$$\text{d. } \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$$

$$\text{e. } \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$$

8. Logaritma merupakan invers atau kebalikan dari eksponen atau perpangkatan.

Jika $a^n = b$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$ maka ${}^a\log b = p$

9. Sifat-sifat Logaritma

a. Logaritma dari perkalian

$${}^a\log MN = {}^a\log M + {}^a\log N, \text{ dimana } a > 0, a \neq 1, M > 0 \text{ dan } N > 0$$

b. Logaritma dari pembagian

$${}^a\log \frac{M}{N} = {}^a\log M - {}^a\log N, \text{ dimana } a > 0, a \neq 1, M > 0 \text{ dan } N > 0$$

c. Logaritma dari perpangkatan

$${}^a\log M^p = p {}^a\log M, \text{ dimana } a > 0, a \neq 1, M > 0$$

d. Mengubah basis logaritma

$${}^M\log N = \frac{{}^a\log N}{{}^a\log M}, \text{ dimana } a > 0, a \neq 1, M > 0$$

dan $N > 0$

e. Perpangkatan dengan logaritma

$$a^{{}^a\log M} = M, \text{ dimana } a > 0, a \neq 1, M > 0$$

E. Latihan

1. Gambarkan dalam suatu skema tentang pembagian sistem bilangan real!

2. Selesaikan soal berikut :

a. $2^{-3} \cdot 2^7$

b. $(-3)^6 \cdot (-3)^5$

c. $\frac{3x^2y^5 \cdot 10xy^3}{6x^2y^4}$

3. Kerjakan soal bentuk akar berikut :

a. Sederhanakan $\sqrt{128}$

b. $125^{\frac{2}{3}} - 81^{\frac{1}{4}} = \dots$

c. Jika

$L = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{3}}$ maka nilai L untuk $a = 100$ dan $b = 64$ adalah ...

d. Hitunglah $\left(\frac{27x^4y^9}{xy^3}\right)^{\frac{2}{3}}$

e. Untuk harga $x = 2^{12}$ maka tentukan nilai dari $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{x}}}$

4. Kerjakan soal logaritma berikut :

a. Uraikan bentuk ${}^a\log\left(\frac{ab}{c}\right)!$

b. Jika ${}^2\log 3 = a$ dan ${}^2\log 5 = b$ maka tentukan nilai ${}^2\log \sqrt{45}!$

c. Jika ${}^2\log 5 = p$ maka tentukan nilai ${}^2\log 40$

d. Jika ${}^2\log a = p$ dan ${}^2\log b = q$ maka tentukan $a.b!$

BAB II

HIMPUNAN

A. Pendahuluan

Konsep himpunan merupakan suatu konsep yang telah banyak mendasari perkembangan ilmu pengetahuan, baik pada bidang matematika itu sendiri maupun pada disiplin ilmu lainnya. Perkembangan pada disiplin ilmu lainnya terutama dalam hal pembentukan model diharuskan menggunakan himpunan / kelompok data observasi dari lapangan. Dengan demikian terlihat jelas begitu penting peran dari konsep himpunan, dan sebagai awal dari bahasan buku ajar ini akan dibahas pengertian himpunan, cara penyajian himpunan, macam-macam himpunan, relasi pada himpunan dan operasi-operasi himpunan.

Diharapkan mahasiswa dapat mendeskripsikan pengertian himpunan, menuliskan himpunan dalam berbagai cara penulisan himpunan, menyebutkan macam-macam himpunan, menentukan relasi pada himpunan dan menggunakan operasi-operasi himpunan.

B. Pengertian Himpunan

Istilah himpunan dalam matematika berasal dari kata "set" dalam bahasa Inggris. Kata lain yang sering digunakan

untuk menyatakan himpunan antara lain kumpulan, kelas, gugus, dan kelompok. Secara sederhana, arti dari himpunan adalah kumpulan objek-objek (real atau abstrak). Sebagai contoh kumpulan buku-buku, kumpulan materai, kumpulan mahasiswa di kelasmu, dan sebagainya. Objek-objek yang dimasukan dalam satu kelompok haruslah mempunyai sifat-sifat tertentu yang sama. Sifat tertentu yang sama dari suatu himpunan harus didefinisikan secara tepat, agar kita tidak salah mengumpulkan objek-objek yang termasuk dalam himpunan itu. Dengan kata lain, himpunan dalam pengertian matematika objeknya / anggotanya harus tertentu (*well defined*), jika tidak ia bukan himpunan.

Dengan demikian, kata himpunan atau kumpulan dalam pengertian sehari-hari ada perbedaannya dengan pengertian dalam matematika. Jika kumpulan itu anggotanya tidak bisa ditentukan, maka ia bukan himpunan dalam pengertian matematika. Demikian juga dengan konsep himpunan kosong dalam matematika, tidak ada istilah tersebut dalam pengertian sehari-hari.

Contoh kumpulan yang bukan himpunan dalam pengertian matematika adalah kumpulan bilangan, kumpulan lukisan indah, dan kumpulan makanan lezat

Pada contoh di atas tampak bahwa dalam suatu kumpulan ada objek. Objek tersebut bisa abstrak atau bisa

juga kongkrit. Pengertian abstrak sendiri berarti hanya dapat dipikirkan, sedangkan pengertian kongkrit selain dapat dipikirkan mungkin ia bisa dilihat, dirasa, diraba, atau dipegang. Pada contoh (1) objeknya adalah bilangan (abstrak). Objek tersebut belum tertentu, sebab kita tidak bisa menentukan bilangan apa saja yang termasuk dalam himpunan tersebut. Pada contoh (2) dan (3), masing-masing objeknya adalah lukisan dan makanan, jadi ia kongkrit. Namun demikian kedua objek tersebut *belum tertentu*, sebab sifat indah dan lezat adalah relatif, untuk setiap orang bisa berlainan.

Sekarang marilah kita pelajari contoh kumpulan yang merupakan himpunan dalam pengertian matematika. Misal (1) kumpulan bilangan asli, (2) kumpulan bilangan cacah kurang dari 10, (3) kumpulan warna pada bendera RI, (4) kumpulan hewan berkaki dua, dan (5) kumpulan manusia berkaki lima

Pada kelima contoh di atas kumpulan tersebut memiliki objek (abstrak atau kongkrit), dan semua objek pada himpunan tersebut adalah tertentu atau dapat ditentukan. Pada contoh (1), (2), dan (3) objeknya abstrak, sedangkan pada contoh (4) dan (5) objeknya kongkrit. Khusus untuk contoh (5) banyaknya anggota 0 (nol), jadi ia tertentu juga. Untuk hal yang terakhir ini biasa disebut himpunan kosong

(*empty set*), suatu konsep himpunan yang didefinisikan dalam matematika. Pembicaraan lebih rinci mengenai himpunan kosong akan dibahas pada bagian lain.

Terkait dengan pengertian himpunan, berikut adalah hal-hal yang harus anda cermati dan ingat, yaitu objek-objek dalam suatu himpunan mestilah berbeda, artinya tidak terjadi pengulangan penulisan objek yang sama.

Sebagai contoh, misalkan $A = \{a, c, a, b, d, c\}$. Himpunan A tersebut *tidak* dipandang mempunyai jumlah anggota sebanyak 6, tetapi himpunan tersebut dipandang sebagai $A = \{a, c, b, d\}$ dengan jumlah anggota sebanyak 4. Urutan objek dalam suatu himpunan tidaklah dipentingkan. Maksudnya himpunan $\{1, 2, 3, 4\}$ dan $\{2, 1, 4, 3\}$ menyatakan himpunan yang sama.

C. Keanggotaan Himpunan dan Bilangan Kardinal

Suatu himpunan dinyatakan dengan huruf kapital, seperti A, B, C, D, \dots , dan untuk menyatakan himpunan itu sendiri dinotasikan dengan tanda kurung kurawal (*aqulade*). Objek yang dibicarakan dalam himpunan tersebut dinamakan anggota (elemen, unsur). Anggota-anggota dari suatu himpunan dinyatakan dengan huruf kecil atau angka-angka dan berada di dalam tanda kurawal. Tanda keanggotaan

dinotasikan dengan \in , sedangkan tanda bukan anggota dinotasikan dengan \notin .

Jika x adalah anggota dari A maka dapat ditulis $x \in A$, dan jika y bukan anggota himpunan A maka ditulis dengan $y \notin A$. Banyaknya anggota dari suatu himpunan disebut dengan kardinal (bilangan kardinal) himpunan tersebut. Jika A adalah suatu himpunan, maka banyaknya anggota dari A (*bilangan kardinal* A) ditulis dengan notasi $n(A)$ atau $|A|$.

Contoh 2.1

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$, maka $n(A) = 6$

D. Penulisan Himpunan

Ada empat cara atau metode untuk menyatakan (menuliskan) suatu himpunan, yaitu :

1. Cara Tabulasi

Cara ini sering disebut juga dengan cara pendaftaran (*roster method*) atau enumerasi, yaitu cara menyatakan suatu himpunan dengan menuliskan anggotanya satu per satu. Untuk membedakan anggota yang satu dengan yang lainnya digunakan tanda koma (,). Jika banyaknya anggota himpunan itu cukup banyak atau tak hingga, untuk menyingkat tulisan biasanya digunakan tanda titik tiga yang berarti "dan seterusnya". Cara tabulasi biasa

digunakan jika anggota dari himpunan itu bisa ditunjukkan satu persatu (diskrit), misal :

$$(1) A = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$(2) B = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots, 100\}$$

$$(3) C = \{\text{merah, jingga, kuning, hijau, biru}\}$$

Pada contoh (1) banyak anggota dari himpunan A adalah tak hingga sehingga tidak mungkin dituliskan semua anggotanya satu persatu, oleh karena itu digunakan titik tiga setelah aturan (pola) bilangan yang disajikan dapat dilihat. Perhatikan bahwa kita tidak boleh menuliskan seperti $A = \{0, \dots\}$ atau $A = \{0, 1, \dots\}$ untuk contoh (1) sebab belum tampak polanya. Penulisan seperti itu bisa mengandung interpretasi lain, sehingga tidak sesuai dengan yang dimaksudkan. Pada contoh (2), juga digunakan tanda titik tiga karena banyak anggotanya cukup banyak dan aturan bilangannya sudah tampak, yaitu kuadrat dari bilangan cacah. Kardinal dari setiap himpunan di atas adalah $n(A) = \infty$, $n(B) = 11$, dan $n(C) = 5$.

2. Cara Pencirian / Deskriptif

Cara ini dikenal juga dengan "*rule method*" atau metode aturan, atau disebut juga metode pembentuk himpunan. Dalam menggunakan metode deskripsi ini, anggota dari suatu himpunan tidak disebutkan satu per

satu, tetapi penyajian anggota himpunannya dilakukan dengan mendefinisikan suatu aturan / rumusan yang merupakan batasan bagi anggota-anggota himpunan. Himpunan yang anggotanya diskrit dapat disajikan dengan cara deskripsi ini, akan tetapi suatu himpunan yang anggotanya kontinu *hanya* bisa disajikan dengan cara deskripsi, dan tidak bisa disajikan dengan cara tabulasi.

Contoh 2.2

1. A = adalah himpunan bilangan cacah yang lebih dari 1 dan kurang dari 8.

Himpunan A , jika disajikan dengan cara tabulasi didapat :

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

sedangkan jika disajikan dengan menggunakan metode deskripsi didapat :

$$A = \{x \mid 1 < x < 8, x \text{ bilangan cacah}\}$$

2. $B = \{x \mid 1 < x < 8, x \text{ bilangan real}\}$.

Himpunan tersebut tidak bisa disajikan dengan cara tabulasi, karena anggotanya kontinu.

Kedua himpunan tersebut memiliki kardinalitas yang berbeda, yaitu $n(A) = 6$ sedangkan $n(B) = \infty$.

3. Simbol-simbol Baku

Beberapa himpunan yang khusus dituliskan dengan simbol-simbol yang sudah baku. Terdapat sejumlah simbol

baku yang menyatakan suatu himpunan, yang biasanya disajikan dengan menggunakan huruf kapital dan dicetak tebal. Berikut adalah contoh-contoh himpunan yang dinyatakan dengan simbol baku, yang sering kita jumpai, yaitu :

N = himpunan bilangan asli = $\{1, 2, 3, \dots\}$

P = himpunan bilangan bulat positif = $\{1, 2, 3, \dots\}$

Z = himpunan bilangan bulat $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

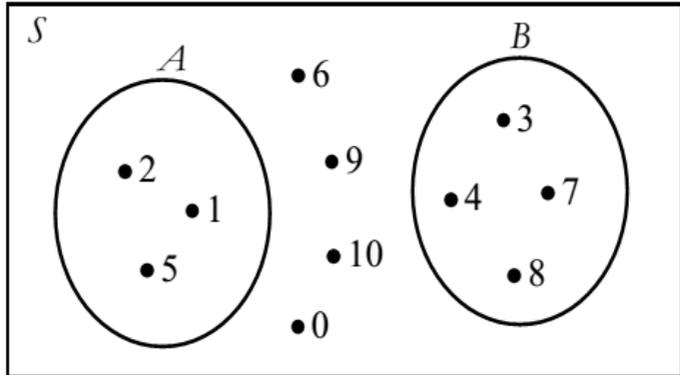
4. Diagram Venn

Dalam diagram venn, himpunan semesta S digambarkan dengan persegi panjang, sedangkan untuk himpunan lainnya digambarkan dengan lengkungan tertutup sederhana, dan anggotanya digambarkan dengan noktah. Anggota dari suatu himpunan digambarkan dengan noktah yang terletak di dalam di dalam daerah lengkungan tertutup sederhana itu, atau di dalam persegi panjang untuk anggota yang tidak termasuk di dalam himpunan itu.

Contoh 2.3

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A = \{1, 2, 5\}; B = \{3, 4, 7, 8\}$$



Gambar 2.1

E. Macam-macam Himpunan

Beberapa konsep berkenaan dengan himpunan yang didefinisikan dalam matematika.

1. Himpunan kosong

Definisi

Suatu himpunan A dikatakan himpunan kosong jika dan hanya jika $n(A) = 0$. Himpunan kosong dilambangkan dengan ϕ (dibaca *phi*). Karena bilangan kardinal dari ϕ sama dengan nol, maka himpunan tidak mempunyai anggota, sehingga $= \{ \}$.

Pengertian *jika dan hanya jika* pada definisi di atas berarti : “jika A himpunan kosong”, maka $n(A) = 0$. Sebaliknya, jika $n(A) = 0$ maka A adalah himpunan kosong.

Berikut disajikan beberapa contoh tentang himpunan kosong.

Contoh 2.4

1. A = himpunan mahasiswa Jurusan Ekonomi dan Bisnis Umsida angkatan 2015/2016 yang mempunyai tinggi badan di atas 3 meter.
2. $B = \{x \mid 6 < x < 7, x \text{ bilangan bulat}\}$
3. $C = \{x \mid x \text{ bilangan prima kelipatan } 6\}$
4. $D = \{x \mid x^2 < 0, x \text{ bilangan real}\}$

2. Himpunan Semesta

Definisi

Himpunan semesta S adalah himpunan yang memuat semua anggota himpunan yang dibicarakan.

Jika anda cermati definisi di atas, tampak bahwa suatu himpunan tertentu merupakan himpunan semesta bagi dirinya sendiri. Himpunan semesta dari suatu himpunan tertentu tidaklah tunggal, tetapi mungkin lebih dari satu. Coba anda perhatikan contoh berikut :

Misalkan $A = \{a, b, c\}$, maka himpunan semesta dari A antara lain adalah :

$$S_1 = \{a, b, c\}$$

$$S_2 = \{a, b, c, d\}$$

$$S_3 = \{a, b, c, d, e\}$$

$$S_4 = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Dari contoh di atas, jelas bahwa himpunan semesta dari suatu himpunan tidaklah tunggal.

Suatu himpunan bisa merupakan himpunan semesta bagi himpunan tertentu asalkan semua anggota dari himpunan tertentu itu menjadi anggota dari himpunan semesta.

F. Relasi antar Himpunan

1. Himpunan yang sama

Definisi

Dua buah himpunan A dan B dikatakan sama, dilambangkan $A = B$, jika dan hanya jika setiap anggota di A merupakan anggota di B , dan juga setiap anggota di B merupakan anggota di A .

Pada definisi di atas, digunakan perkataan *jika dan hanya jika*, ini mengandung arti bahwa :

- a. jika himpunan A sama dengan B , maka setiap anggota di A merupakan anggota di B , dan
- b. jika terdapat dua himpunan sedemikian hingga setiap anggota pada himpunan pertama merupakan anggota pada himpunan kedua dan setiap anggota pada

himpunan kedua merupakan anggota pada himpunan pertama, maka dikatakan bahwa kedua himpunan itu sama.

Contoh 2.5

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dan

$B = \{x \mid x < 9, x \text{ bilangan cacah}\}$

Himpunan B jika dituliskan dengan metode tabulasi maka di dapat $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Dengan memperhatikan anggota-anggota pada A dan B , maka jelas bahwa $A = B$.

Contoh 2.6

Misalkan $C = \{a, b, c, d\}$ dan $D = \{c, a, b\}$.

Meskipun setiap anggota di D merupakan anggota di C , akan tetapi tidak setiap anggota di C merupakan anggota di D .

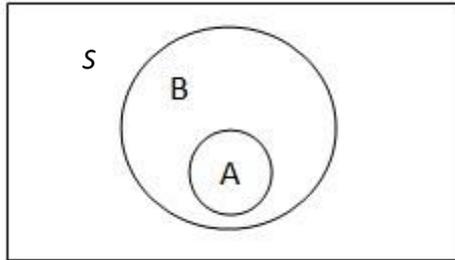
Dengan demikian $C \neq D$.

2. Himpunan bagian

Definisi.

A dikatakan himpunan bagian dari B , dilambangkan $A \subseteq B$, jika dan hanya jika setiap anggota di A merupakan anggota di B .

Jika $A \subseteq B$ digambarkan dengan menggunakan diagram venn, maka didapatkan sebagai berikut.



Gambar 2.2 $A \subseteq B$

Sebagai contoh bahwa $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c, d\}$ dan $\{2, 4, 6, 8\} \subseteq \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$. Anda pastinya juga setuju bahwa $A \subseteq B$ adalah ekuivalen dengan $B \supseteq A$. Penulisan $B \supseteq A$ lazimnya dimaknai sebagai B *superset* dari A .

Definisi.

A dikatakan himpunan bagian sejati (*proper subset*) dari B , $A \subset B$, jika dan hanya jika setiap anggota di A merupakan anggota di B dan paling sedikit terdapat satu anggota di B yang bukan merupakan anggota A .

Sebagai contoh, perhatikan bahwa $\{1, 2, 3, 4, 5\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ akan tetapi $\{a, b, c\} \not\subset \{c, a, b\}$.

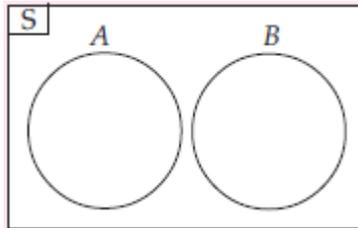
3. Himpunan Lepas

Definisi

A dan B dikatakan lepas (*disjoint*) jika dan hanya jika tidak terdapat anggota bersama pada A dan B , atau dengan kata

lain A dan B dikatakan lepas jika $A \cap B = \phi$. Simbol $A \cap B$ menyatakan irisan dari A dan B .

Berikut adalah deskripsi dari A lepas dengan B .



Gambar 2.3 $A \cap B = \phi$

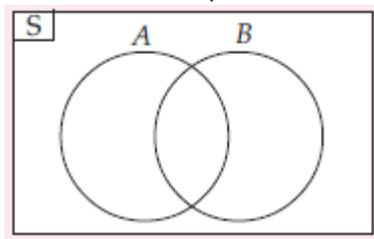
Contoh 2.7

Misalkan $A = \{a, b, c, d, e\}$ dan $B = \{f, h, i, j, k\}$ maka didapatkan bahwa $A \cap B = \phi$. Karena $A \cap B = \phi$ maka A dan B merupakan himpunan yang lepas.

4. Himpunan Bersilangan

Definisi

A bersilangan dengan B jika dan hanya jika $A \cap B \neq \phi$, atau dengan kata lain irisan dari kedua himpunan tersebut tidak kosong. Berikut adalah deskripsi dari A bersilangan dengan B .



Gambar 2.4 $A \cap B \neq \phi$

Contoh 2.8

Misalkan $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan $B = \{d, e, f, g, h, i\}$ maka didapatkan bahwa $A \cap B = \{d, e, f\}$. Karena $A \cap B = \{d, e, f\} \neq \phi$ maka A dan B merupakan himpunan yang bersilangan.

5. Himpunan Ekuivalen

Definisi

A ekuivalen dengan himpunan B , dilambangkan $A \sim B$, jika dan hanya jika banyaknya anggota dari A sama dengan banyaknya anggota B , atau $n(A) = n(B)$.

Contoh 2.9

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

$$B = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$n(A) = 6 \text{ dan } n(B) = 6$$

$$\text{Maka } A \sim B$$

6. Himpunan Kuasa (*Power Set*)

Definisi

Himpunan Kuasa dari himpunan A , dilambangkan $P(A)$, adalah suatu himpunan yang anggotanya merupakan semua himpunan bagian dari A , termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

Contoh 2.10

$$A = \{a, b, c\}.$$

Himpunan bagian dari A adalah $\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$.

Sehingga $P(A) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

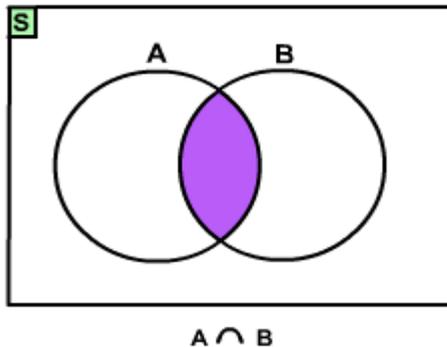
G. Operasi Himpunan

1. Irisan (*Intersection*)

Definisi

Irisan dari A dan B , dilambangkan $A \cap B$, adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota dari himpunan A dan sekaligus anggota himpunan B .

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

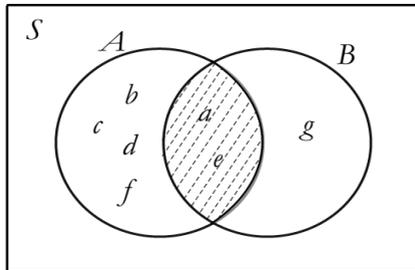


Gambar 2.5 $A \cap B$

Contoh 2.11

Misalkan $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan $B = \{a, e, g\}$ maka $A \cap B = \{a, e\}$.

Diagram venn-nya adalah sebagai berikut.



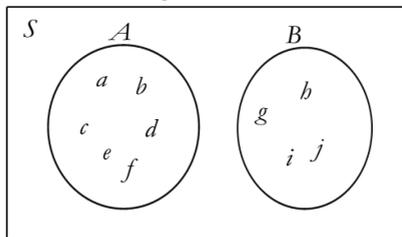
Gambar 2.6

Daerah yang diarsir menyatakan $A \cap B$

Contoh 2.12

Misalkan $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan $B = \{g, h, i, j\}$ maka $A \cap B = \phi$.

Diagram venn-nya adalah sebagai berikut



Gambar 2.7

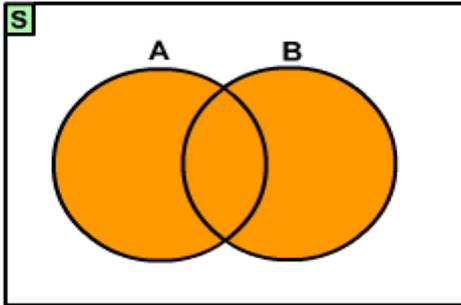
Karena $A \cap B = \phi$ maka tidak ada daerah yang diarsir

2. Gabungan (Union)

Definisi

Gabungan antara himpunan A dan himpunan B dilambangkan $A \cup B$, adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota himpunan A atau anggota himpunan B .

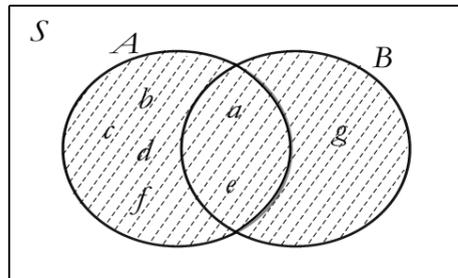
$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}$$



$A \cup B$ Gambar 2.8 $A \cup B$

Contoh 2.13

Misalkan $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan $B = \{a, e, g\}$ maka $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Diagram venn-nya adalah sebagai berikut.

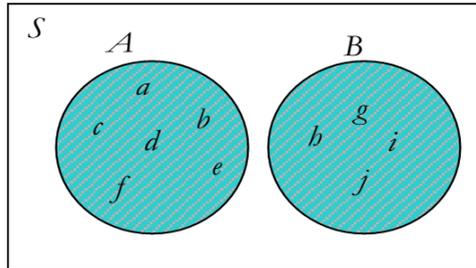


Gambar 2.9

Daerah yang diarsir menyatakan $A \cup B$.

Contoh 2.14

Misalkan $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan $B = \{g, h, i, j\}$ maka $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$. Diagram venn-nya adalah sebagai berikut.



Gambar 2.10

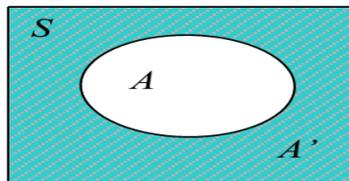
Daerah yang diarsir menyatakan $A \cup B$

3. Komplement

Definisi

Diberikan himpunan universal (semesta) S dan himpunan A . $A \subseteq S$, komplement dari A , dilambangkan A' , adalah himpunan semua objek di S yang **tidak** termasuk di A .

$$A' = \{x \mid x \in S \text{ dan } x \notin A\}$$



Gambar 2.11

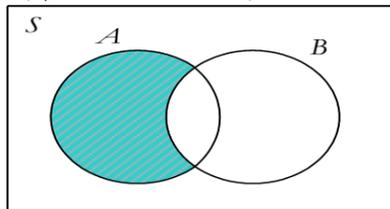
Contoh 2.16

Misalkan $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ dan $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ maka B' adalah himpunan bilangan S selain B , yaitu $B' = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

4. Selisih Himpunan

Selisih dari A dan B , dilambangkan $A - B$, adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota dari himpunan A tetapi bukan merupakan anggota dari himpunan B .

$$A - B = \{x | x \in A \text{ dan } x \notin B\}$$

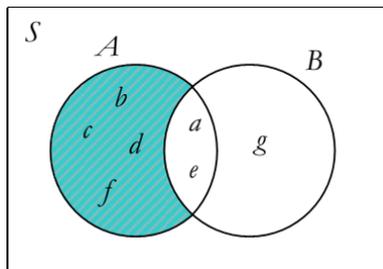


Gambar 2.12

Contoh 2.17

Misalkan $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan $B = \{a, e, g\}$ maka $A - B = \{b, c, d, f\}$.

Diagram venn-nya adalah sebagai berikut.



Gambar 2.13

Daerah yang diarsir menyatakan $A - B$

H. Sifat-sifat Operasi pada Himpunan

1. Sifat Identitas

$$A \cup \phi = A$$

2. Sifat Dominasi

$$A \cap \phi = \phi$$

3. Sifat Komplemen

$$A \cup A' = S$$

4. Sifat Idempoten

$$A \cup A = A$$

5. Sifat Penyerapan

$$A \cup (A \cap B) = A$$

6. Sifat Komutatif

$$A \cup B = B \cup A \text{ atau } A \cap B = B \cap A$$

7. Sifat Asosiatif

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \text{ atau } A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

8. Sifat Distributif

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ atau } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Sifat De-Morgan

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \text{ atau } (A \cap B)' = A' \cup B'$$

9. Sifat Komplemen ke-2

$$\phi' = S \text{ atau } S' = \phi$$

I. Rangkuman

1. Himpunan dalam pengertian matematika objeknya / anggotanya harus tertentu (*well defined*), jika tidak ia bukan himpunan.
2. Penulisan Himpunan.

Ada empat metode dalam menuliskan himpunan :

a. Cara Tabulasi

Cara ini sering disebut juga dengan cara pendaftaran (*roster method*) atau enumerasi, yaitu cara menyatakan suatu himpunan dengan menuliskan anggotanya satu per satu. Untuk membedakan anggota yang satu dengan yang lainnya digunakan tanda koma (.). Jika banyaknya anggota himpunan itu cukup banyak atau tak hingga, untuk menyingkat tulisan lazimnya dengan menggunakan tanda titik tiga yang berarti dan seterusnya, asal aturannya sudah tampak pada pernyataan anggota yang telah dituliskan.

b. Cara Pencirian / Deskriptif

Cara ini dikenal juga dengan "*rule method*" atau metode aturan, atau disebut juga metode pembentuk himpunan. Dalam menggunakan metode deskripsi ini, anggota dari suatu himpunan tidak disebutkan satu per satu, tetapi penyajian anggota himpunannya dilakukan

dengan mendefinisikan suatu aturan/rumusan yang merupakan batasan bagi anggota-anggota himpunan.

c. Simbol-simbol Baku

Berikut adalah contoh-contoh himpunan yang dinyatakan dengan simbol baku, yang sering kita jumpai, yaitu :

N = himpunan bilangan asli = {1, 2, 3, ...}

P = himpunan bilangan bulat positif = {1, 2, 3, ...}

Z = himpunan bilangan bulat {...,-2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

d. Diagram Venn

Dalam diagram venn himpunan semesta S digambarkan dengan persegi panjang, sedangkan untuk himpunan lainnya digambarkan dengan lengkungan tertutup sederhana, dan anggotanya digambarkan dengan noktah. Anggota dari suatu himpunan digambarkan dengan noktah yang terletak di dalam di dalam daerah lengkungan tertutup sederhana itu, atau di dalam persegi panjang untuk anggota yang tidak termasuk di dalam himpunan itu.

3. Beberapa konsep macam-macam himpunan :

a. Himpunan Kosong

Suatu himpunan A dikatakan himpunan kosong jika dan hanya jika $n(A) = 0$. Himpunan kosong dilambangkan dengan ϕ (dibaca *phi*). Karena bilangan kardinal dari ϕ sama dengan nol, maka himpunan tidak mempunyai anggota, sehingga $= \{ \}$

b. Himpunan Semesta

Himpunan semesta S adalah himpunan yang memuat semua anggota himpunan yang dibicarakan

4. Relasi antar Himpunan :

a. Himpunan yang sama

Dua buah himpunan A dan B dikatakan sama, dilambangkan $A = B$, jika dan hanya jika setiap anggota di A merupakan anggota di B , dan juga setiap anggota di B merupakan anggota di A .

b. Himpunan Bagian

A dikatakan himpunan bagian dari B , dilambangkan $A \subseteq B$, jika dan hanya jika setiap anggota di A merupakan anggota di B .

c. Himpunan Lepas

A dan B dikatakan lepas (*disjoint*) jika dan hanya jika tidak terdapat anggota bersama pada A dan B , atau

dengan kata lain A dan B dikatakan lepas jika

$$A \cap B = \phi$$

d. Himpunan Bersilangan

A bersilangan dengan B jika dan hanya jika $A \cap B \neq \phi$, atau dengan kata lain irisan dari kedua himpunan tersebut tidak kosong

e. Himpunan Ekuivalen

A ekuivalen dengan himpunan B , dilambangkan $A \sim B$, jika dan hanya jika banyaknya anggota dari A sama dengan banyaknya anggota B , atau $n(A) = n(B)$.

f. Himpunan Kuasa (*Power Set*)

Himpunan Kuasa dari himpunan A , dilambangkan $P(A)$, adalah suatu himpunan yang anggotanya merupakan semua himpunan bagian dari A , termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

5. Operasi Himpunan

a. Irisan (*Intersection*)

Irisan dari A dan B , dilambangkan $A \cap B$, adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota dari himpunan A dan sekaligus anggota himpunan B .

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

b. Gabungan (Union)

Gabungan antara himpunan A dan himpunan B dilambangkan $A \cup B$, adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota himpunan A atau anggota himpunan B .

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}$$

c. Komplemen

Diberikan himpunan universal (semesta) S dan himpunan A . $A \subseteq S$, komplemen dari A , dilambangkan A' , adalah himpunan semua objek di S yang **tidak** termasuk di A .

$$A' = \{x | x \in S \text{ dan } x \notin A\}$$

d. Selisih

Selisih dari A dan B , dilambangkan $A - B$, adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota dari himpunan A tetapi bukan merupakan anggota dari himpunan B .

$$A - B = \{x | x \in A \text{ dan } x \notin B\}$$

6. Sifat-sifat Operasi pada Himpunan

a. Sifat Identitas

$$A \cup \phi = A$$

b. Sifat Dominasi

$$A \cap \phi = \phi$$

c. Sifat Komplemen

$$A \cup A' = S$$

d. Sifat Idempoten

$$A \cup A = A$$

e. Sifat Penyerapan

$$A \cup (A \cap B) = A$$

f. Sifat Komutatif

$$A \cup B = B \cup A \text{ atau } A \cap B = B \cap A$$

g. Sifat Asosiatif

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \text{ atau } A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

h. Sifat Distributif

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ atau } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

i. Sifat De-Morgan

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \text{ atau } (A \cap B)' = A' \cup B'$$

j. Sifat Komplemen ke-2

$$\phi' = S \text{ atau } S' = \phi$$

J. Latihan

1. Misalkan $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$.

Dengan menggunakan cara tabulasi tentukan himpunan berikut :

- $A \cap B$
- $A \cup B$
- $(A \cap B)'$
- $(A \cup B)'$
- A'
- B'
- $A' \cap B'$
- $A' \cup B'$
- Apakah $(A \cap B)' = A' \cup B'$?
- Apakah $(A \cup B)' = A' \cap B'$?

2. Dengan menggunakan diagram venn tunjukkan bahwa :

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3. Dari 100 orang mahasiswa, 60 mahasiswa mengikuti kuliah Bahasa Inggris, 50 mahasiswa mengikuti kuliah Statistika, 30 mahasiswa mengikuti kuliah Matematika Dasar, 30 mahasiswa mengikuti kuliah Bahasa Inggris dan Statistika, 16 mahasiswa mengikuti kuliah Bahasa Inggris dan Matematika Dasar, 10 mahasiswa mengikuti kuliah Statistika dan Matematika Dasar, dan 6 mahasiswa mengikuti kuliah ketiga-tiganya. Berapa banyak mahasiswa

yang mengikuti kuliah Bahasa Inggris, atau Statistika, atau Matematika Dasar?

4. Manakah dari himpunan berikut ini, yang merupakan himpunan kosong? Jelaskan!
 - a. $\{x \mid x \text{ nama huruf vokal selain } a, i, u, e, o \text{ di dalam alfabet}\}$
 - b. $\{x \mid x^2 = 9 \text{ dan } 2x = 4\}$
 - c. $\{x \mid x \neq x\}$
 - d. $\{x \mid x + 6 = 6, x \text{ bilangan asli}\}$
5. Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, $C = \{3, 1, 2\}$, $D = \{a, b, c\}$, $E = \{1, 2\}$, $F = \{0, 1, 2, 3\}$, dan $G = \{\text{bilangan cacah antara } 0 \text{ dan } 4\}$
 - a. Himpunan manakah yang sama dengan A ?
 - b. Himpunan manakah yang ekuivalen dengan A ?
 - c. Jika H dan I adalah himpunan, sedemikian sehingga berlaku $H = I$, apakah $H \sim I$? Jelaskan!
 - d. Jika J dan K adalah himpunan, sedemikian sehingga berlaku $J \sim K$, apakah $J = K$? Jelaskan!
6. Misalkan $A = \{2, \{4,5\}, 4\}$. Manakah pernyataan yang salah? Jelaskan!
 - a. $\{4, 5\} \subset A$
 - b. $\{4, 5\} \in A$
 - c. $\{\{4, 5\}\} \subset A$

BAB III

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINEAR

A. Pendahuluan

Dasar dari suatu persamaan adalah sebuah pernyataan matematika yang terdiri dari dua ungkapan pada ruas kanan dan ruas kiri yang dipisahkan oleh tanda “=” (dibaca sama dengan). Hal yang tak diketahui dalam sebuah persamaan disebut variabel. Dan sebuah penyelesaian dari suatu persamaan berupa nilai yang jika disubstitusikan pada variabel menghasilkan sebuah pernyataan yang benar.

Sementara itu, istilah-istilah seperti lebih dari, kurang dari, lebih besar, lebih kecil, lebih tinggi, lebih rendah, tidak sama sudah menjadi bahasa sehari-hari dalam masyarakat. Istilah-istilah tersebut digunakan untuk menentukan nilai maksimum atau nilai minimum dari suatu permasalahan atau pernyataan yang dapat dimodelkan secara matematis.

Diharapkan mahasiswa dapat menentukan penyelesaian dari persamaan linear satu variabel dan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan linear satu variabel.

B. Persamaan Linear Satu Variabel

Definisi

Suatu persamaan yang memuat satu variabel berpangkat satu.

Contoh 3.1

1. $x = 9$
2. $5x + 4 = 29$
3. $3x - 2 = x + 24$

Sebuah penyelesaian untuk suatu persamaan adalah sebarang bilangan yang membuat persamaan itu benar jika bilangan itu disubstitusikan pada variabel.

Contoh 3.2

1. $3x = 21$

Persamaan ini mempunyai penyelesaian bilangan 7, karena $3(7) = 21$ adalah benar. Sementara bilangan 5 bukan sebuah penyelesaian dari $3x = 21$, karena $3(5) = 21$ adalah salah.

2. $3x - 2 = x + 24$

Jika persamaan ini diselesaikan maka mempunyai penyelesaian bilangan 13, karena $3(13) - 2 = 13 + 24$.

Prinsip Penjumlahan dan Perkalian

Ada dua prinsip yang diperbolehkan untuk menyelesaikan bermacam-macam persamaan.

Pertama, Prinsip Penjumlahan

Untuk sebarang bilangan real a , b dan c , jika $a = b$ maka berlaku

$$a + c = b + c$$

$$a - c = b - c$$

Kedua, Prinsip Perkalian

Untuk sebarang bilangan real a , b dan c , jika $a = b$ maka berlaku

$$a \cdot c = b \cdot c$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}, \text{ benar dengan } c \neq 0 .$$

Contoh 3.3

Tentukan penyelesaian dari $3x - 2 = 31$.

Penyelesaian :

$$3x - 2 = 31$$

$$3x - 2 + 2 = 31 + 2 \quad \text{menggunakan prinsip penjumlahan, kedua ruas}$$

$$3x = 33$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)3x = \left(\frac{1}{3}\right)33 \quad \text{menggunakan prinsip perkalian, kedua ruas dik}$$

$$x = 11$$

Contoh 3.4

Tentukan penyelesaian dari $3(x - 1) - 1 = 5 - 5(x + 5)$

Penyelesaian :

$$3(x-1)-1=5-5(x+5)$$

$$3x-3-1=5-5x-25 \quad \text{sifat distributif}$$

$$3x-4=-5x-20$$

$$3x-4+4=-5x-20+4 \quad \text{kedua ruas ditambah 4}$$

$$3x=-5x-16$$

$$3x+5x=-5x+5x-16 \quad \text{kedua ruas ditambah 5x}$$

$$8x=-16$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)8x=\left(\frac{1}{8}\right)\cdot-16 \quad \text{kedua ruas dikali}$$

$$\frac{1}{8}$$

$$x = -2$$

C. Persamaan Ekuivalen

Definisi

Persamaan Ekuivalen adalah persamaan yang mempunyai himpunan penyelesaian yang sama.

Contoh 3.5

(1) $2x = 12$

(2) $-5x = -30$

(3) $3x + 5 = 23$

(4) $2x - 5 = x + 1$

Keempat persamaan tersebut ekuivalen karena mempunyai himpunan penyelesaian yang sama yaitu $x = 4$.

D. Persamaan Linear Bentuk Pecahan Satu Variabel

Yaitu persamaan yang memuat pecahan. Untuk menyelesaikan persamaan pecahan ini digunakan perkalian dengan variabel.

Contoh 3.6

Tentukan penyelesaian dari $\frac{x-2}{5} + \frac{x}{3} = \frac{1}{5}$.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{5} + \frac{x}{3} &= \frac{1}{5} \\ 15\left(\frac{x-2}{5} + \frac{x}{3}\right) &= 15\left(\frac{1}{5}\right) && \text{kedua ruas dikali 15} \\ 15\left(\frac{x-2}{5}\right) + 15\left(\frac{x}{3}\right) &= 3 && \text{sifat distributif} \\ 3x - 6 + 5x &= 3 \\ 8x - 6 &= 3 \\ 8x - 6 + 6 &= 3 + 6 && \text{kedua ruas ditambah 6} \\ 8x &= 9 \\ \left(\frac{1}{8}\right)8x &= \left(\frac{1}{8}\right)9 && \text{kedua ruas dikali } \frac{1}{8} \\ x &= \frac{9}{8}\end{aligned}$$

E. Pertidaksamaan Linear Satu Variabel

Definisi

Suatu pertidaksamaan yang hanya mempunyai satu variabel dengan pangkat tertinggi variabelnya satu.

Contoh 3.7

1. $x < 9$
2. $5x + 4 > 29$
3. $3x - 2 < x + 24$

Pada prinsipnya penyelesaian pertidaksamaan linear mirip dengan persamaan linear. Hal ini dapat dilihat pada tabel perbandingan berikut.

No	Penyelesaian Persamaan	Penyelesaian Pertidaksamaan
1.	Prinsip Penjumlahan Menambah dengan bilangan yang sama pada kedua ruas.	Prinsip Penjumlahan Menambah dengan bilangan yang sama pada kedua ruas.
2.	Prinsip Perkalian Kedua ruas dikalikan dengan bilangan yang sama.	Prinsip Perkalian <ol style="list-style-type: none">1. Jika kedua ruas dikalikan dengan bilangan positif yang sama maka tanda pertidaksamaan tidak berubah.2. Jika kedua ruas dikalikan dengan bilangan negatif yang

		<p>sama, tanda pertidaksamaan berubah dari < menjadi >, dari ≤ menjadi ≥ dan sebaliknya.</p>
--	--	---

Contoh 3.8

Tentukan penyelesaian dari $2x - 4 < 6$.

Penyelesaian :

$$2x - 4 < 6$$

$$2x - 4 + 4 < 6 + 4 \quad \text{kedua ruas ditambah 4}$$

$$2x < 10$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)2x < \left(\frac{1}{2}\right)10 \quad \text{kedua ruas dikali } \frac{1}{2}$$

$$x < 5$$

Jadi himpunan penyelesaiannya $\{x|x < 5\}$

Contoh 3.9

Tentukan penyelesaian dari $3x - 5 > x + 7$.

Penyelesaian :

$$3x - 5 + 5 > x + 7 + 5 \quad \text{kedua ruas ditambah 5}$$

$$3x > x + 12$$

$$3x - x > x - x + 12 \quad \text{kedua ruas ditambah } -x$$

$$2x > 12$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)2x > \left(\frac{1}{2}\right)12 \quad \text{kedua ruas dikali } \frac{1}{2}$$

$$x > 6$$

Jadi himpunan penyelesaiannya $\{x|x > 6\}$.

Contoh 3.10

Tentukan penyelesaian dari $3x - 2(2x - 7) > 2(3 + x) - 4$.

Penyelesaian :

$$3x - 2(2x - 7) \geq 2(3 + x) - 4$$

$$3x - 4x + 14 \geq 6 + 2x - 4 \quad \text{sifat distributif}$$

$$-x + 14 \geq 2 + 2x$$

$$-x + 14 - 14 \geq 2 + 2x - 14 \quad \text{kedua ruas ditambah } -14$$

$$-x \geq 2x - 12$$

$$-x - 2x \geq -12 \quad \text{kedua ruas ditambah } -x$$

$$-3x \geq -12$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot -3x \leq \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot -12 \quad \text{kedua ruas dikali } -\frac{1}{3}$$

$$x \leq 4$$

Jadi himpunan penyelesaiannya $\{x|x \leq 4\}$

Contoh 3.11

Tentukan himpunan penyelesaian dari $3 < x + 7 < 11$.

Penyelesaian :

$$3 < x + 7 < 11$$

Untuk menyelesaikan soal ini menggunakan dua langkah karena menyelesaikannya menggunakan kombinasi pertidaksamaan.

Langkah I.

$$3 < x + 7$$

$$3 - 7 < x + 7 - 7 \quad \text{kedua ruas ditambah } -7$$

$$-4 < x$$

$$x > -4 \quad \dots(1)$$

Langkah II.

$$x + 7 < 11$$

$$x + 7 - 7 < 11 - 7 \quad \text{kedua ruas ditambah } -7$$

$$x < 4 \quad \dots(2)$$

Dari (1) dan (2) dikombinassikan maka himpunan penyelesaiannya $\{x \mid -4 < x < 4\}$

F. Pertidaksamaan Linear Bentuk Pecahan Satu Variabel

Yaitu pertidaksamaan yang memuat pecahan. Untuk menyelesaikan pertidaksamaan pecahan ini digunakan perkalian variabel.

Contoh 3.12

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\frac{x}{3} > 1 + \frac{x}{4}$.

Penyelesaian :

$$\frac{x}{3} > 1 + \frac{x}{4}$$

$$12\left(\frac{x}{3}\right) > 12\left(1 + \frac{x}{4}\right) \quad \text{kedua ruas dikali 12}$$

$$4x > 12 + 3x$$

$$4x - 3x > 12 + 3x - 3x \quad \text{kedua ruas ditambah } -3x$$

$$x > 12$$

Jadi himpunan penyelesaiannya $\{x|x > 12\}$

G. Rangkuman

1. Persamaan adalah sebuah pernyataan matematika yang terdiri dari dua ungkapan pada ruas kanan dan ruas kiri yang dipisahkan oleh tanda “=” (dibaca sama dengan)
2. Penyelesaian untuk suatu persamaan adalah sebarang bilangan yang membuat persamaan itu benar jika bilangan itu disubstitusikan pada variabel.

3. Untuk setiap $a, b, c \in R$

Jika $a = b$ maka $a + c = b + c$

4. Untuk setiap $a, b, c \in R$

Jika $a = b$ maka $a \cdot c = b \cdot c$

5. Untuk setiap $a, b, c \in R$

Jika $a = b$ maka $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, $c \neq 0$

Jika $a \cdot b = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$

Jika $a = 0$ atau $b = 0$ maka $ab = 0$

6. Persamaan-persamaan yang mempunyai himpunan penyelesaian yang sama disebut persamaan ekuivalen
7. Lambang dari pertidaksamaan $<$, \leq , $>$, \geq .
8. Prinsip-prinsip untuk menyelesaikan pertidaksamaan :
 - a. Prinsip Penjumlahan, kedua ruas ditambah dengan bilangan yang sama.
 - b. Prinsip Perkalian, kedua ruas dikalikan dengan bilangan yang sama.
 - 1) Jika dikalikan dengan bilangan positif tanda pertidaksamaan tidak berubah.
 - 2) Jika dikalikan dengan bilangan negatif tanda pertidaksamaan berubah kebalikannya.

H. Latihan

1. Tentukan penyelesaian dari persamaan berikut :

a. $-x - 1 = x + 3$

b. $19x - 78 + 53x = 30 + 18x$

c. $(3x - 2) - 2(6 - x) = 1$

d. $3(7 - 2x) + (x - 1) - 5(2 - x) = 2x + 1$

2. Tentukan penyelesaian dari persamaan berikut :

a. $\frac{12}{x} = \frac{-3}{4}$

b. $\frac{2x}{9} - \frac{x}{12} = \frac{5}{6}$

c. $\frac{1}{x} + \frac{5}{x-2} = \frac{4}{x-2}$

3. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut :

a. $-24x < 8$

b. $(3x - 2) - 2(6 - x) > 1$

c. $3(7 - 2x) + (x - 1) - 5(2 - x) \leq 2x + 1$

4. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut :

a. $-x - \frac{1}{2} > 1$

b. $\frac{3-x}{3} \leq \frac{x}{4}$

c.
$$\frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x}{4} > x - 2$$

d.
$$\frac{3}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x} \leq \frac{1}{5}$$

5. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4} - 2x < 1$$
 adalah

BAB IV

FUNGSI

A. Pendahuluan

Salah satu konsep dalam matematika yang paling penting adalah konsep fungsi. Dengan konsep fungsi, para matematikawan maupun para ahli di bidang yang lain dengan jelas dapat mengetahui apakah suatu struktur identik dengan struktur yang lain. Dan hampir semua cabang matematika menggunakan konsep fungsi dalam pengembangannya.

Fungsi linear dan fungsi kuadrat merupakan salah satu fungsi yang banyak digunakan dalam kehidupan. Banyak masalah sehari-hari menjadi lebih mudah diselesaikan dengan menggunakan konsep fungsi linear dan fungsi kuadrat.

Diharapkan mahasiswa dapat menerapkan konsep fungsi baik fungsi linear maupun fungsi kuadrat dalam berbagai permasalahan sehari-hari dan berbagai bidang pengembangan ilmu yang lain

B. Pengertian Fungsi

Definisi

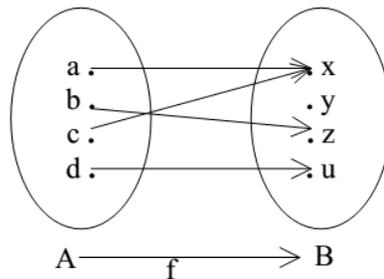
Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang

memasangkan setiap elemen dari A secara tunggal, dengan elemen pada B .

Apabila f memetakan suatu elemen $x \in A$ ke suatu $y \in B$ dikatakan bahwa y adalah peta dari x oleh f dan peta ini dinyatakan dengan notasi $f(x)$, dan biasa ditulis dengan $f : x \rightarrow f(x)$, sedangkan x biasa disebut prapeta dari $f(x)$.

Himpunan A dinamakan daerah asal (domain) dari fungsi f , sedangkan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain) sedangkan himpunan dari semua peta di B dinamakan daerah hasil (range) dari fungsi f tersebut.

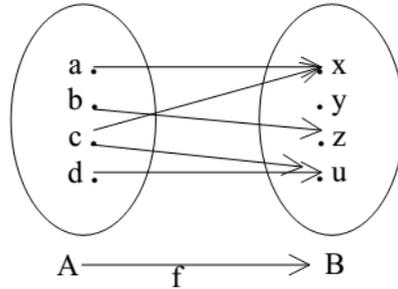
Contoh 4.1



Gambar 4.1

Diagram sebagaimana pada Gambar 1 di atas adalah fungsi karena pertama, terdapat relasi (yang melibatkan dua himpunan yakni A dan B) dan kedua, pemasangan setiap elemen A adalah secara tunggal.

Contoh 4.2



Gambar 4.2

Diagram 4.2 bukan merupakan fungsi karena ada elemen A yang dipasangkan tidak secara tunggal dengan elemen pada B .

C. Sifat Fungsi

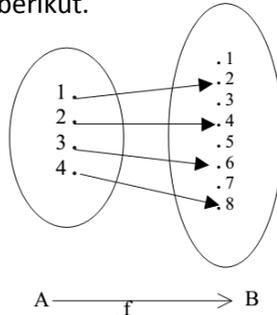
Dengan memperhatikan bagaimana elemen-elemen pada masing-masing himpunan A dan B yang direlasikan dalam suatu fungsi, maka kita mengenal tiga sifat fungsi yakni sebagai berikut :

1. Injektif (Satu-satu)

Misalkan fungsi f menyatakan A ke B maka fungsi f disebut suatu fungsi satu-satu (injektif), apabila setiap dua elemen yang berlainan di A akan dipetakan pada dua elemen yang berbeda di B . Selanjutnya secara singkat dapat dikatakan bahwa $f : A \rightarrow B$ adalah fungsi injektif apabila $a \neq a'$ berakibat $f(a) \neq f(a')$ atau ekuivalen, jika $f(a) = f(a')$ maka akibatnya $a = a'$.

Contoh 4.3

1. Fungsi f pada R yang didefinisikan dengan $f(x) = x^2$ bukan suatu fungsi satu-satu sebab $f(-2) = f(2)$.
2. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 4.3

Adapun fungsi pada $A = \{\text{bilangan asli}\}$ yang didefinisikan dengan $f(x) = 2x$ adalah fungsi satu-satu, sebab kelipatan dua dari setiap dua bilangan yang berlainan adalah berlainan pula.

2. Surjektif (Onto)

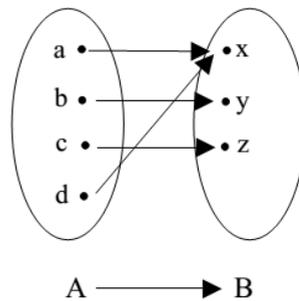
Misalkan f adalah suatu fungsi yang memetakan A ke B maka daerah hasil $f(A)$ dari fungsi f adalah himpunan bagian dari B , atau $f(A) \subset B$.

Apabila $f(A) = B$, yang berarti setiap elemen di B pasti merupakan peta dari sekurang-kurangnya satu elemen di A maka kita katakan f

adalah suatu fungsi surjektif atau “ f memetakan A Onto B ”.

Contoh 4.4

1. Fungsi $f : R \rightarrow R$ yang didefinisikan dengan rumus $f(x) = x^2$ bukan fungsi yang onto karena himpunan bilangan negatif tidak dimuat oleh hasil fungsi tersebut.
2. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 4.4

Misal $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{x, y, z\}$ dan fungsi $f : A \rightarrow B$ yang didefinisikan dengan diagram panah adalah suatu fungsi yang surjektif karena daerah hasil f adalah sama dengan kodomain dari f (himpunan B).

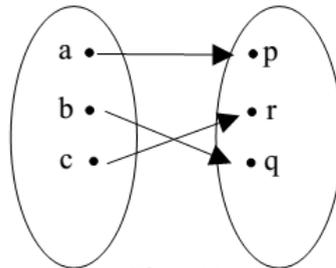
3. Bijektif (Korespondensi Satu-satu)

Suatu pemetaan $f : A \rightarrow B$ sedemikian rupa sehingga f merupakan fungsi yang injektif dan surjektif sekaligus, maka dikatakan “ f

adalah fungsi yang bijektif” atau “ A dan B berada dalam korespondensi satu-satu”.

Contoh 4.5

1. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 4.5

Relasi dari himpunan $A = \{a, b, c\}$ ke himpunan $B = \{p, q, r\}$ yang didefinisikan sebagai diagram di samping adalah suatu fungsi yang bijektif.

2. Fungsi f yang memasangkan setiap negara di dunia dengan ibu kota negara-negara di dunia adalah fungsi korespondensi satu-satu (fungsi bijektif), karena tidak ada satu kotapun yang menjadi ibu kota dua negara yang berlainan.

D. Jenis Fungsi

Jika suatu fungsi f mempunyai daerah asal dan daerah kawan yang sama, misalnya D , maka sering dikatakan fungsi f pada D . Jika

daerah asal dari fungsi tidak dinyatakan maka yang dimaksud adalah himpunan semua bilangan real (R). Untuk fungsi-fungsi pada R kita kenal beberapa fungsi antara lain sebagai berikut.

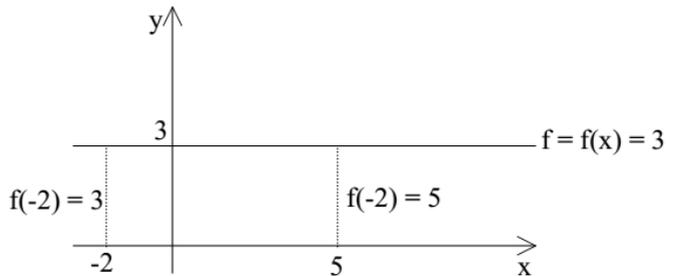
1. Fungsi Konstan

Definisi

$f : x \rightarrow C$ dengan C konstan disebut fungsi konstan (tetap). Fungsi f memetakan setiap bilangan real dengan C .

Contoh 4.6

Fungsi $f : x \rightarrow 3$



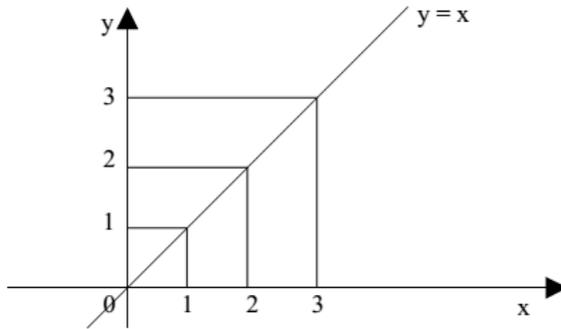
Gambar 4.6

$$f(-2) = 3, f(0) = 3, f(5) = 3.$$

2. Fungsi Identitas

Definisi

Fungsi $R \rightarrow R$ yang didefinisikan sebagai $f : x \rightarrow x$ disebut fungsi identitas.



Gambar 4.7

$$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$$

3. Fungsi Linear

Definisi

Fungsi pada bilangan real yang didefinisikan $f(x) = ax + b$, a dan b konstan dengan $a \neq 0$ disebut fungsi linear.

Grafik fungsi linier berupa garis lurus. Untuk menggambar grafik fungsi linier bisa dilakukan dengan dua cara yaitu dengan membuat tabel dan dengan menentukan titik potong dengan sumbu- x dan sumbu- y .

Contoh 4.7

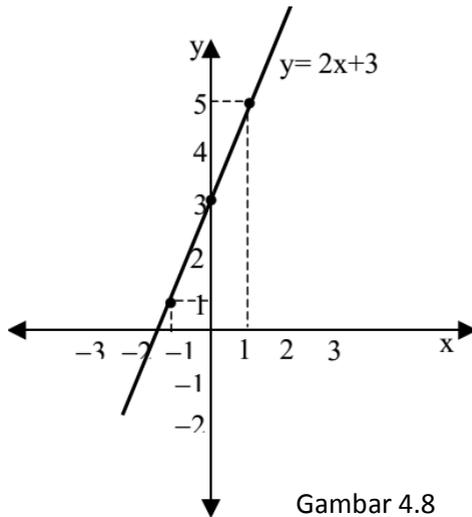
Gambarlah grafik fungsi $y = 2x + 3$

Penyelesaian :

Dengan membuat tabel :

$$y = 2x + 3$$

x	-1	0	1
y	1	3	5



Gambar 4.8

Dari tabel diperoleh titik-titik berupa pasangan koordinat, kita gambar titik tersebut dalam bidang Cartesius kemudian dihubungkan, sehingga tampak membentuk garis lurus.

Dengan menentukan titik-titik potong dengan sumbu-x dan sumbu-y

$$y = 2x + 3$$

Titik potong grafik dengan sumbu-x :

$$y = 0 \rightarrow 0 = 2x + 3$$

$$-2x = 3$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

sehingga titik potong grafik dengan sumbu x adalah

$$\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$$

Titik potong grafik dengan sumbu-y :

$$x = 0 \rightarrow y = 2x + 3$$

$$y = 2 \cdot 0 + 3$$

$$y = 0 + 3$$

$$y = 3$$

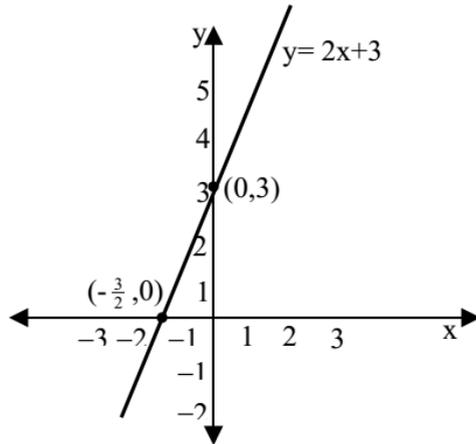
sehingga titik potong grafik dengan sumbu-y adalah (0,3)

Kedua titik potong tersebut digambar dalam bidang

Cartesius

kemudian

dihubungkan sehingga tampak membentuk garis lurus.



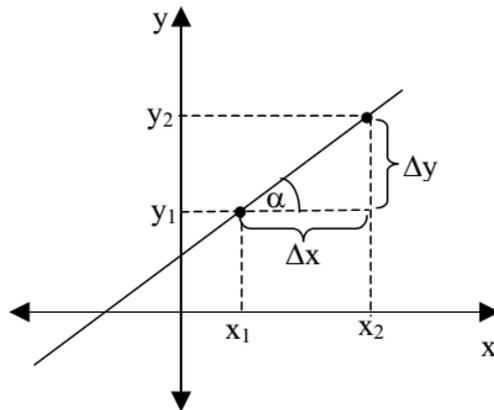
Gambar 4.9

Beberapa hal penting dalam Fungsi Linear

a. Gradien

Gradien atau koefisien arah (m) adalah konstanta yang menunjukkan tingkat kemiringan suatu garis.

Perhatikan gambar berikut ini :



Gambar 4.10

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Persamaan garis $y = mx + c$, dengan $m, c \in R$, c adalah konstanta, dengan m melambangkan gradien / koefisien arah garis lurus. Pada gambar di atas, misalkan α adalah sudut antara garis horisontal (sejajar sumbu x) dan grafik fungsi linier dengan arah putaran berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam, maka gradien dapat pula didefinisikan sebagai

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha$$

Catatan :

- 1) Jika $m = 0$ maka grafik sejajar dengan sumbu- x dan ini sering disebut sebagai fungsi konstan.
- 2) Jika $m > 0$ maka grafik miring ke kanan ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)
- 3) Jika $m < 0$ maka grafik miring ke kiri ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$)

b. Menentukan Persamaan Garis melalui Satu Titik dan gradien m

Misalkan garis $y = mx + c$ melalui titik $P (x_1, y_1)$, setelah nilai koordinat titik P disubstitusikan ke persamaan garis tersebut diperoleh:

$$y = mx + c$$

$$y_1 = mx_1 + c$$

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

Jadi persamaan garis melalui titik $P (x_1, y_1)$, dan bergradien m adalah

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

c. Menentukan Persamaan Garis melalui Dua Titik

Persamaan garis melalui dua titik $A (x_1, y_1)$ dan $B (x_2, y_2)$ dapat dicari dengan langkah sebagai berikut :

Persamaan garis melalui titik $A (x_1, y_1)$ dengan memisalkan gradiennya m adalah

$$y - y_1 = m (x - x_1) \dots\dots\dots (i)$$

karena garis ini juga melalui titik $B (x_2, y_2)$, maka $y_2 - y_1 = m (x_2 - x_1)$, sehingga diperoleh gradiennya

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \dots\dots\dots(ii)$$

persamaan (ii) disubstitusikan ke persamaan (i) diperoleh

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Jadi persamaan garis melalui dua titik $A (x_1, y_1)$ dan $B (x_2, y_2)$ adalah

$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

d. Menentukan Titik Potong antara Dua Garis

Misalkan dua garis g_1 dan g_2 saling berpotongan di titik $P (x, y)$ maka nilai x dan y harus memenuhi kedua persamaan garis tersebut. Titik potong dua garis dapat dicari dengan metode substitusi, eliminasi, atau membuat sketsa grafiknya.

e. Hubungan Gradien dari Dua Garis

- 1) Garis g_1 yang bergradien m_1 dikatakan sejajar dengan garis g_2 yang bergradien m_2 jika memenuhi $m_1 = m_2$.
- 2) Garis g_1 yang bergradien m_1 dikatakan tegak lurus dengan garis g_2 yang bergradien m_2 jika memenuhi $m_1 \cdot m_2 = -1$.

4. Fungsi Kuadrat

Definisi

Bentuk umum fungsi kuadrat adalah $y = ax^2 + bx + c$ dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$. Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola maka sering juga disebut fungsi parabola. Jika $a > 0$, parabola terbuka ke atas sehingga mempunyai titik balik minimum, dan jika $a < 0$ parabola terbuka ke bawah sehingga mempunyai titik balik maksimum.

Langkah-langkah dalam menggambar grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$

a. Tentukan pembuat nol fungsi $\rightarrow y = 0$ atau $f(x) = 0$

Pembuat nol fungsi dari persamaan kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ diperoleh jika $ax^2 + bx + c = 0$. Sehingga diperoleh nilai x yang

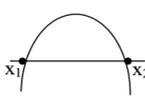
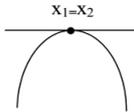
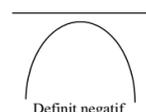
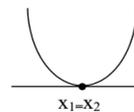
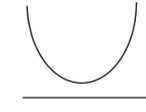
memenuhi $ax^2 + bx + c = 0$. Nilai ini tidak lain adalah absis titik potong dengan sumbu- x , sedangkan untuk menentukan titik potong dengan sumbu- y , dapat dilakukan dengan mensubstitusikan nilai x tadi pada persamaan kuadrat semula.

b. Tentukan sumbu simetri $x = -\frac{b}{2a}$

c. Tentukan titik puncak $P(x, y)$ dengan $x = -\frac{b}{2a}$ dan

$$y = -\frac{D}{4a}, \text{ dengan nilai } D = b^2 - 4ac.$$

Jika ditinjau dari nilai a dan D maka sketsa grafik parabola sebagai berikut :

$a < 0, D > 0$ 	$a < 0, D = 0$ 	$a < 0, D < 0$ 
$a > 0, D > 0$ 	$a > 0, D = 0$ 	$a > 0, D < 0$ 

Catatan :

Persamaan Kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dapat dicari akar-akarnya dengan:

1) Pemfaktoran

2) Melengkapi bentuk kuadrat sempurna

3) Rumus abc : $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Contoh 4.8

Gambarlah sketsa grafik fungsi $y = x^2 - 6x + 5$

Penyelesaian :

a. Menentukan pembuat nol fungsi, dengan pemfaktoran diperoleh

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$x = 1 \text{ atau } x = 5$$

b. Menentukan sumbu simetri $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} = 3$

c. Menentukan titik puncak $P(x, y)$

Karena nilai x sudah diperoleh maka tinggal mencari nilai y dengan substitusi

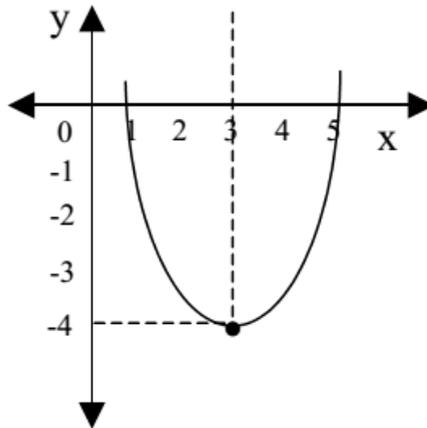
$x = 3$ pada fungsi semula

$$y = 3^2 - 6(3) + 5$$

$$= 9 - 18 + 8$$

$$= -4$$

Jadi puncak parabola adalah titik $(3, -4)$ sehingga sketsa grafiknya seperti pada gambar di bawah ini.



E. Rangkuman

1. Pengertian fungsi

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap elemen dari A secara tunggal, dengan elemen pada B .

2. Sifat-sifat Fungsi

a. Injektif (Satu-satu)

$f : A \rightarrow B$ adalah fungsi injektif apabila $a \neq a'$ berakibat $f(a) \neq f(a')$ atau ekuivalen, jika $f(a) = f(a')$ maka akibatnya $a = a'$.

b. Surjektif (Onto)

f adalah suatu fungsi yang memetakan A ke B maka daerah hasil $f(A)$ dari fungsi f adalah himpunan bagian dari B , atau $f(A) \subset B$. Apabila $f(A) = B$, yang berarti setiap elemen di B pasti merupakan peta dari sekurang-kurangnya satu elemen di A maka kita katakan f adalah suatu fungsi surjektif atau “ f memetakan A Onto B ”

c. Bijektif (Korespondensi satu-satu)

$f : A \rightarrow B$ sedemikian rupa sehingga f merupakan fungsi yang injektif dan surjektif sekaligus, maka dikatakan “ f adalah fungsi yang bijektif” atau “ A dan B berada dalam korespondensi satu-satu”

3. Jenis Fungsi

a. Fungsi Konstan

Fungsi $f : x \rightarrow C$ dengan C konstan disebut fungsi konstan (tetap). Fungsi f memetakan setiap bilangan real dengan C .

b. Fungsi Identitas

Fungsi $R \rightarrow R$ yang didefinisikan sebagai $f : x \rightarrow x$ disebut fungsi identitas.

c. Fungsi Linear

Fungsi pada bilangan real yang didefinisikan $f(x) = ax + b$, a dan b konstan dengan $a \neq 0$ disebut fungsi linear.

d. Fungsi Kuadrat

Bentuk umum fungsi kuadrat adalah $y = ax^2 + bx + c$ dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$. Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola maka sering juga disebut fungsi parabola. Jika $a > 0$, parabola terbuka ke atas sehingga mempunyai titik balik minimum, dan jika $a < 0$ parabola terbuka ke bawah sehingga mempunyai titik balik maksimum.

4. Beberapa hal penting dalam fungsi linear

a. Gradien

Gradien atau koefisien arah (m) adalah konstanta yang menunjukkan tingkat kemiringan suatu garis.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

b. Menentukan Persamaan Garis melalui Satu Titik dan gradien m

Persamaan garis melalui titik $P(x_1, y_1)$, dan bergradien m adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

c. Menentukan Persamaan Garis melalui Dua Titik

Persamaan garis melalui dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ adalah

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

d. Menentukan Titik Potong antara Dua Garis

Misalkan dua garis g_1 dan g_2 saling berpotongan di titik $P(x, y)$ maka nilai x dan y harus memenuhi kedua persamaan garis tersebut. Titik potong dua garis dapat dicari dengan metode substitusi, eliminasi, atau membuat sketsa grafiknya

e. Hubungan Gradien dari Dua Garis

1) Garis g_1 yang bergradien m_1 dikatakan sejajar dengan garis g_2 yang bergradien m_2 jika memenuhi $m_1 = m_2$.

2) Garis g_1 yang bergradien m_1 dikatakan tegak lurus dengan garis g_2 yang bergradien m_2 jika memenuhi $m_1 \cdot m_2 = -1$

5. Langkah-langkah dalam menggambar grafik fungsi kuadrat

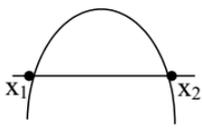
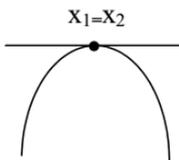
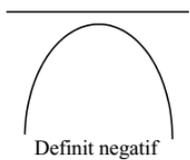
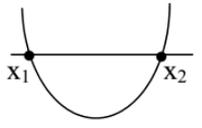
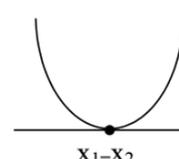
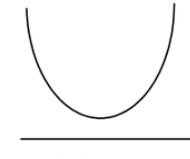
$$y = ax^2 + bx + c$$

a. Tentukan pembuat nol fungsi $\rightarrow y = 0$ atau $f(x) = 0$

b. Tentukan sumbu simetri $x = -\frac{b}{2a}$

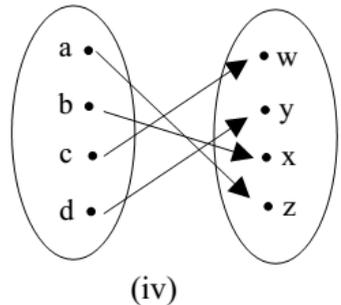
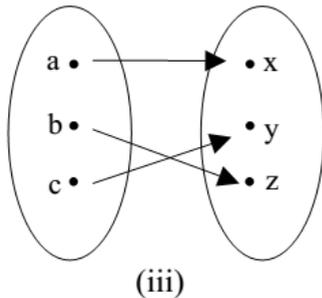
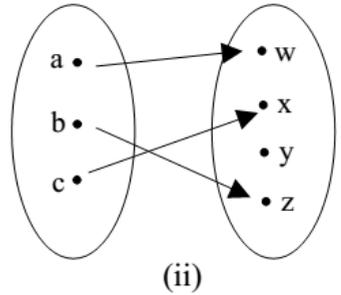
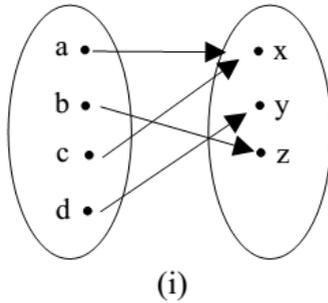
c. Tentukan titik puncak $P(x, y)$ dengan $x = -\frac{b}{2a}$

dan $y = -\frac{D}{4a}$, dengan nilai $D = b^2 - 4ac$

<p>$a < 0, D > 0$</p> 	<p>$a < 0, D = 0$</p> <p>$x_1 = x_2$</p> 	<p>$a < 0, D < 0$</p>  <p>Definit negatif</p>
<p>$a > 0, D > 0$</p> 	<p>$a > 0, D = 0$</p> <p>$x_1 = x_2$</p> 	<p>$a > 0, D < 0$</p>  <p>Definit positif</p>

F. Latihan

1. Diantara fungsi-fungsi berikut, manakah yang merupakan fungsi injektif, surjektif, serta bijektif? Berilah penjelasannya!



2. Suatu fungsi $f: R \rightarrow R$ ditentukan oleh $f(x) = x^2 - 2$
 - a. Tentukan $f(-1)$, $f(a)$, dan $f(1)$.
 - b. Tentukan a jika $f(a) = 23$
 - c. Anggota manakah dari daerah asal yang mempunyai peta 34 ?
3. Manakah yang merupakan fungsi injektif, surjektif, atau bijektif dari fungsi dengan domain $\{1, 2, 3, 4\}$, yang didefinisikan sebagai berikut?
 - a. $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$; jika kodomainnya $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
 - b. $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1)\}$; jika kodomainnya $\{1, 2, 3\}$

- c. $R = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$; jika kodomainnya $\{1, 2, 3, 4\}$
- d. $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 4)\}$; jika kodomainnya $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
4. Tentukan persamaan garis yang melalui :
- titik $M(1, 2)$ dan $N(-1, 6)$
 - titik $(-2, 3)$ dan membentuk sudut 45° terhadap sumbu x positif
5. Diketahui gradien garis g adalah $-\frac{1}{2}$. Jika garis tersebut melalui titik $A(2, 3)$ dan $B(k, 6)$, tentukan nilai k !
6. Tentukan persamaan garis l yang melalui $R(3, 1)$ dan tegak lurus garis AB dimana titik $A(2, 3)$ dan $B(6, 5)$!

BAB V

MATRIKS

A. Pendahuluan

Matriks dalam matematika digunakan untuk menyatakan bilangan-bilangan ke dalam jajaran empat persegi panjang, terbentuknya suatu matriks dapat diperoleh melalui suatu sistem persamaan linier, demikian pula sebaliknya bahwa suatu sistem persamaan linier dapat diperoleh melalui suatu matriks. Dalam kehidupan sehari-hari penggunaan matriks dapat mempermudah penyajian suatu data dari tabel sekaligus operasi-operasi bilangan yang terkandung di dalamnya. Oleh karena itu, pemahaman mengenai matriks ini sangat penting untuk diperoleh.

Melalui bab ini, mahasiswa diharapkan memahami pengertian matriks, jenis-jenis matriks, operasi dan sifat-sifat matriks, determinan, dan invers, serta dapat menggunakannya dalam pemecahan masalah.

B. Pengertian Matriks

Matriks adalah susunan bilangan-bilangan dalam bentuk baris dan kolom yang membentuk suatu persegi panjang. Penulisan susunan tersebut dibatasi oleh kurung siku atau kurung biasa. Bilangan-bilangan dalam matriks bisa berupa bilangan *real* ataupun bilangan kompleks. Namun dalam buku

ini pembahasan matriks hanya dibatasi pada bilangan real, lihat contoh 5.1.

Contoh 5.1

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1,5 & 0 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix} [2 \quad 8 \quad -1] \quad [7]$$

Suatu matriks ditentukan oleh banyak baris (misal m baris) dan kolom (misal n kolom), sehingga suatu matriks yang terdiri dari $m \times n$ unsur (biasa disebut ordo $m \times n$). Notasi matriks menggunakan huruf kapital, sementara notasi untuk menyatakan unsur-unsurnya menggunakan huruf kecil. Seperti contoh 5.2.

Contoh 5.2

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad B = (a \quad b \quad c)$$

Matriks A di atas terdiri dari 3 baris dan 2 kolom yang memiliki 6 unsur, sedangkan matriks B terdiri dari 1 baris dan 3 kolom.

Jika A adalah suatu matriks, maka simbol untuk menyatakan unsur-unsur pada baris i dan unsur-unsur pada kolom j adalah a_{ij} . Sehingga matriks A pada contoh 5.2 dapat ditulis dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Jadi bentuk umum suatu matriks A yang memiliki unsur-unsur pada baris ke i dan unsur-unsur pada kolom j adalah

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau } A_{m \times n} = (a_{ij})$$

Keterangan:

A : Matriks A

$A_{m \times n}$: Matriks A berordo $m \times n$

a_{12} : Unsur matriks A pada baris 1 kolom 2

a_{mn} : Unsur matriks A pada baris m kolom n

(a_{ij}) : Matriks A yang memiliki i baris dan j kolom
dengan $i = 1, 2, 3, \dots, m$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, n$

C. Jenis-Jenis Matriks

Pada dasarnya jenis suatu matriks tergantung dari ordo dan unsur-unsurnya, berikut dijelaskan beberapa jenis-jenis matriks.

1. Matriks baris adalah matriks yang hanya terdiri dari satu baris, matriks ini disebut juga vektor baris, misal:

$$A = [1 \quad -2 \quad 3]$$

2. Matriks kolom adalah matriks yang hanya terdiri dari satu kolom, matriks ini disebut juga vektor kolom, misal:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3. Matriks nol adalah matriks yang memiliki unsur nol semua, misal:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Matriks negatif adalah matriks yang semua unsurnya dikalikan dengan bilangan -1 atau semua unsurnya merupakan bilangan negatif.
5. Matriks bujur sangkar adalah matriks yang memiliki ordo $m \times m$ atau memiliki banyak baris dan kolom yang sama, matriks ini disebut juga matriks persegi, misal:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar yang memiliki semua unsur bilangan di atas dan di bawah diagonal ialah 0, matriks ini disimbolkan dengan huruf D, misal:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

7. Matriks skalar adalah matriks diagonal yang memiliki unsur bilangan yang sama pada diagonalnya, misal:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

8. Matriks identitas adalah matriks skalar yang setiap unsur bilangan pada diagonalnya ialah 1, matriks ini disebut juga matriks satuan, misal:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Suatu matriks apabila dikalikan dengan matriks satuan maka akan kembali pada dirinya sendiri, misal $A \cdot I = I \cdot A = A$

9. Matriks transpose adalah matriks yang diperoleh dengan menukarkan letak unsur-unsur pada baris menjadi letak unsur-unsur pada kolom, demikian pula sebaliknya. Simbol untuk menyatakan matriks transpose dari matriks A adalah A^T misal:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 9 & -8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 1 \\ 2 & -8 & 3 \end{bmatrix}$$

10. Matriks simetris adalah matriks bujur sangkar yang memiliki sifat bahwa transposenya sama dengan matriks semula, misal

$$A = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

11. Matriks singular adalah matriks bujur sangkar yang memiliki determinan 0 dan tidak memiliki invers. Sebaliknya apabila matriks bujur sangkar memiliki determinan $\neq 0$ dan memiliki invers, maka disebut matriks non-singular.

D. Operasi dan Sifat-sifat Matriks

Sebelum membahas mengenai operasi dan sifat-sifat matriks, akan lebih baik dipahami terlebih dahulu tentang

pengertian dari kesamaan matriks bahwa dua matriks dikatakan sama jika kedua matriks tersebut memiliki ukuran yang sama dan unsur-unsur yang bersesuaian pada kedua matriks tersebut sama. Perhatikan contoh 5.3 berikut.

Contoh 5.3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 7 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Pada contoh 5.3 matriks $A = B$ karena A dan B memiliki ukuran yang sama dan unsur-unsur yang bersesuaian pun sama. $A \neq C$ karena meski A dan C memiliki ukuran yang sama, namun ada unsur bersesuaian yang tidak sama yakni 7 dan 9. $A \neq D$ karena tidak memiliki ukuran yang sama.

Operasi-operasi pada matriks menyebabkan kekhasan atau sifat-sifat pada matriks yang dijelaskan sebagai berikut.

1. Penjumlahan matriks

Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka $A + B$ merupakan matriks yang diperoleh dengan menambahkan unsur-unsur yang bersesuaian pada A dan B . Dalam hal ini artinya jika dua matriks atau lebih memiliki ukuran yang berbeda, maka matriks-matriks tersebut tidak dapat dijumlahkan.

Contoh 5.4

Perhatikan matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 13 \\ 3 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

Namun $A + C$ atau $B + C$ tidak dapat ditentukan.

Sifat-sifat yang berlaku pada penjumlahan matriks adalah

- a. $A + B = B + A$ (sifat komutatif)
- b. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (sifat asosiatif)
- c. $A + 0 = 0 + A = A$ (memiliki matriks identitas yakni matriks 0)

2. Pengurangan matriks

Syarat operasi pengurangan sama dengan operasi penjumlahan yakni ukuran matriks yang dioperasikan harus sama. Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka $A - B$ merupakan matriks yang diperoleh dengan mengurangkan unsur-unsur yang bersesuaian pada A dengan B .

Contoh 5.5

Pada contoh 5.5 ini, kita gunakan matriks-matriks pada contoh 5.4

Sehingga

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Namun $A - C$ atau $B - C$ tidak dapat ditentukan.

Berbeda dengan sifat-sifat yang berlaku pada penjumlahan matriks, pada pengurangan matriks tidak berlaku sifat komutatif dan sifat asosiatif.

3. Perkalian skalar dengan matriks

Jika c adalah suatu skalar dan A adalah suatu matriks A , maka hasil kali cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan c pada setiap unsur A .

Contoh 5.6

Perhatikan matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$3A = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 3 & -21 \\ 18 & 15 \end{bmatrix} \quad (-1)A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 7 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

Secara intuitif, pada contoh di atas dapat diperoleh informasi bahwa jika A adalah sebarang matriks maka $-A$ menyatakan $(-1)A$. Serta, jika A dan B adalah dua matriks yang ukurannya sama, maka $A - B$ didefinisikan sebagai $A + (-B) = A + (-1)B$.

Sehingga sifat-sifat yang berlaku pada perkalian skalar dengan matriks adalah

- a. $(-1)A = -A$
- b. $A + (-B) = A + (-1)B$
- c. $A + (-A) = A - A = 0$

d. $cA = Ac$ (sifat komutatif)

e. $c(A + B) = cA + cB$ (sifat distributif)

f. $c(A - B) = cA - cB$

g. $(c + d)A = cA + dA$

h. $(cd)A = c(dA)$ (sifat asosiatif)

4. Perkalian matriks dengan matriks

Jika A adalah matriks berordo $m \times n$ dan B adalah matriks berordo $n \times r$, Hasil kali A dan B adalah suatu matriks (misal C) yang memiliki ordo $m \times r$. Setiap elemen dari C (misal c_{ij}) diperoleh dari jumlah hasil kali unsur-unsur baris ke- i dari A dengan unsur-unsur kolom ke- j dari B .

Dari penjelasan tersebut diketahui bahwa syarat dua matriks dapat dikalikan adalah banyak kolom matriks pertama harus sama dengan banyak baris pada matriks kedua, sehingga hasil perkalian tersebut memiliki ordo baru yakni banyak baris matriks pertama kali banyak kolom matriks kedua.

Contoh 5.7

Perhatikan matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Karena A adalah matriks berordo 2×3 dan B adalah matriks berordo 3×3 , maka hasil perkalian A dan B

adalah matriks berordo 2×3 (misal $AB=C$). Untuk mendapatkan unsur-unsur C (c_{ij}), berikut perhitungannya

$$c_{11} = (1.2) + (0.4) + (-1. -1) = 3$$

$$c_{12} = (1.0) + (0.1) + (-1.2) = -2$$

$$c_{13} = (1.3) + (0.0) + (-1.5) = -2$$

$$c_{21} = (3.2) + (2.4) + (4. -1) = 10$$

$$c_{22} = (3.0) + (2.1) + (4.2) = 10$$

$$c_{23} = (3.3) + (2.0) + (4.5) = 29$$

sehingga

$$A \cdot B = C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 10 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

Hasil kali A dan B di atas menghasilkan C, sekarang yang menjadi pertanyaan adalah apakah hasil kali B dan A menghasilkan C? dengan kata lain apakah perkalian matriks dengan matriks bersifat komutatif?. Perhatikan bahwa B dan A tidak dapat dikalikan karena banyak kolom dari B tidak sama dengan banyak baris dari A. Sehingga perkalian matriks dengan matriks tidak bersifat komutatif atau $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Sifat-sifat yang berlaku pada perkalian matriks dengan matriks adalah sebagai berikut

- a. $A(BC) = (AB)C$ (sifat asosiatif)
- b. $A(B + C) = AB + AC$ (sifat distributif)
- c. $(B + C)A = BA + CA$
- d. $A(B - C) = AB - AC$

e. $(B - C)A = BA - CA$

f. $AI = IA = A$ (memiliki matriks identitas)

5. Perpangkatan matriks

Perpangkatan matriks A^n dengan $n > 1$, $n \in$ bilangan asli hanya dapat dilakukan jika A adalah matriks bujur sangkar dan unsur-unsur hasil perpangkatan matriks bukan merupakan perpangkatan dari unsur-unsur A . Dengan demikian jika A matriks bujur sangkar maka berlaku $A^2 = A.A$; $A^3 = A^2.A$ dan seterusnya.

Contoh 5.8

Diberikan A adalah matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 20 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa unsur-unsur yang bersesuaian pada A^2 bukan hasil kuadrat dari unsur-unsur pada A .

E. Determinan

Suatu matriks yang memiliki determinan hanyalah matriks bujur sangkar, determinan dapat didefinisikan sebagai jumlah semua hasil kali elementer. Yang dimaksud dengan hasil kali elementer adalah setiap hasil kali n unsur dari matriks tersebut.

Misal matriks A merupakan matriks bujur sangkar, biasanya fungsi determinan disimbolkan dengan \det , jumlah semua hasil kali elementer dari A disimbolkan $\det(A)$ atau sering juga disimbolkan $|A|$, sementara jumlah $\det(A)$ merupakan determinan A .

Jika A adalah matriks dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Maka determinan A dengan menggunakan hasil kali elementer adalah

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Contoh 5.9

Diberikan A adalah matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$\det(A) = 3 \cdot 7 - 1 \cdot 5$$

Jika A adalah matriks dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Maka determinan A dengan menggunakan hasil kali elementer adalah

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{33}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Cara menentukan determinan matriks ordo 3x3 di atas sering kali disebut dengan metode **sarrus**, metode ini hanya dapat digunakan untuk matriks berordo 3x3. Cara kerja metode ini adalah menempatkan dua kolom pertama dari determinan awal, lalu menjumlahkan hasil kali unsur pada tiap diagonal dari kiri atas ke kanan bawah yang dikurangi dengan jumlah hasil kali unsur pada tiap diagonal dari kiri bawah ke kanan atas.

Contoh 5.10

Diberikan A adalah matriks, tentukan $\det(A)$ menggunakan metode sarrus

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -4 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (0 + 12 + 4) - (-12 + (-36) + 0) = 64$$

Determinan matriks berordo 4x4 atau lebih dapat dihitung melalui ekspansi kofaktor, sebetulnya cara ini dapat digunakan untuk mencari determinan pada semua matriks bujur sangkar yang memiliki berordo berapapun termasuk ordo 2x2 dan 3x3. Namun secara umum, cara seperti pada

$$\begin{array}{cccccc}
+ & - & + & - & + & \dots \\
- & + & - & + & - & \dots \\
+ & - & + & - & + & \dots \\
- & + & - & + & - & \dots \\
+ & - & + & - & + & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots
\end{array}$$

Mencari deteminan dengan menggunakan ekspansi kofaktor dilakukan dengan cara menambahkan setiap hasil kali dari unsur-unsur suatu baris dengan kofaktor-kofaktornya. Misal A adalah matriks yang berukuran $m \times m$ serta $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq m$, maka berlaku

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{im}C_{im}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris i)

dan

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{mj}C_{mj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom j)

Contoh 5.12

Dengan menggunakan A pada contoh 5.11, hitunglah $\det(A)$.

Misal $\det(A)$ dicari dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom 3.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -1 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - (3) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \\
&= -1(-16) - 3(-16) \\
&= 64
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa nilai $\det(A)$ ini sama dengan nilai $\det(A)$ pada contoh 5.10. Manakah penyelesaian yang lebih mudah dan sederhana? Tentu hal ini diserahkan pada pembaca untuk memilihnya sebagai suatu strategi. Menurut anda mengapa pada contoh di atas menggunakan ekspansi kofaktor pada kolom ke 3? Bukan pada kolom yang lain atau suatu baris?. Andaikan kolom yang dipilih bukan ke-3, maka perhitungannya akan sedikit lebih lama. Memang strategi dalam memilih ekspansi “kolom atau baris” atau “urutan kolom atau urutan baris” adalah dengan cara memilih kolom atau baris yang memiliki bilangan nol paling banyak.

F. Invers Matriks

Invers matriks dari A adalah matriks B sehingga $AB = BA = I$, hal ini berlaku jika A adalah matriks bujur sangkar dan A dapat dibalik (*invertible*). Notasi untuk menyatakan invers matriks A adalah A^{-1} . Sementara untuk mencari A^{-1} dapat menggunakan rumus

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{adj}(A)), \det(A) \neq 0$$

Keterangan:

$\text{adj}(A)$ = adjoin matriks A

$\text{adj}(A)$ diperoleh dari mentranspose matriks kofaktor (matriks yang terbentuk melalui kofaktor-kofaktor yang bersesuaian)

Contoh 5.13

Apabila A adalah matriks berordo 2×2 dan $ad - bc \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Bagaimanakah A^{-1} yang terbentuk.

Sebelum mencari A^{-1} kita cari terlebih dahulu $\det(A)$ dan $\text{adj}(A)$

$$\det(A) = ad - bc$$

$C_{11} = d, C_{12} = -c, C_{21} = -b, C_{22} = a$, sehingga matriks

$$\text{kofaktor } C = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi } \text{adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Hasil akhir di atas dapat menjadi sebuah rumus praktis yang digunakan untuk mendapatkan invers suatu matriks yang berordo 2×2 .

Contoh 5.14

Dengan menggunakan A pada contoh 5.11, berapakah A^{-1}

Sebelumnya telah diperoleh bahwa $\det(A) = 64$

Dengan menggunakan rumus $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ diperoleh

$$C_{11} = 12 \quad C_{12} = 6 \quad C_{13} = -16$$

$$C_{21} = 4 \quad C_{22} = 2 \quad C_{23} = 16$$

$$C_{31} = 12 \quad C_{32} = -10 \quad C_{33} = 16$$

Sehingga matriks kofaktor

$$C = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Jadi

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{32} & \frac{1}{32} & -\frac{5}{32} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

G. Rangkuman

1. Matriks adalah susunan bilangan-bilangan dalam bentuk baris dan kolom yang membentuk suatu persegi panjang.
2. Matriks yang terdiri dari $m \times n$ unsur (biasa disebut ordo $m \times n$) dengan menyatakan banyak baris dan n menyatakan banyak kolom.
3. Jika A adalah suatu matriks yang memiliki unsur-unsur pada baris ke i dan unsur-unsur pada baris j , maka bentuk umum matriks A dituliskan dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau } A_{m \times n} = (a_{ij})$$

Keterangan:

A : Matriks A

$A_{m \times n}$: Matriks A berordo $m \times n$

a_{12} : Unsur matriks A pada baris 1 kolom 2

a_{mn} : Unsur matriks A pada baris m kolom n

(a_{ij}) : Matriks A yang memiliki i baris dan j kolom
dengan $i = 1, 2, 3, \dots, m$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, n$

4. Jenis-jenis matriks diantaranya adalah matriks baris, matriks kolom, matriks nol, matriks negatif, matriks bujur sangkar, matriks diagonal, matriks skalar, matriks identitas, matriks transpose, matriks simetris, dan matriks singular.
5. Dua matriks dikatakan sama jika kedua matriks tersebut memiliki ukuran yang sama dan unsur-unsur yang bersesuaian pada kedua matriks tersebut sama.
6. Operasi Penjumlahan Matriks
Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka $A + B$ merupakan matriks yang diperoleh dengan menambahkan unsur-unsur yang bersesuaian pada A dan B .
7. Sifat-sifat yang berlaku pada penjumlahan matriks adalah
 - a. $A + B = B + A$ (sifat komutatif)
 - b. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (sifat asosiatif)

c. $A + 0 = 0 + A = A$ (memiliki matriks identitas yakni matriks 0)

8. Operasi Pengurangan Matriks

Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka $A - B$ merupakan matriks yang diperoleh dengan mengurangi unsur-unsur yang bersesuaian pada A dengan B.

9. Pada operasi pengurangan tidak berlaku sifat komutatif dan sifat asosiatif.

10. Perkalian skalar dengan matriks

Jika c adalah suatu skalar dan A adalah suatu matriks A , maka hasil kali cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan c pada setiap unsur A .

11. Sifat-sifat yang berlaku pada perkalian skalar dengan matriks adalah

a. $(-1)A = -A$

b. $A + (-B) = A + (-1)B$

c. $A + (-A) = A - A = 0$

d. $cA = Ac$ (sifat komutatif)

e. $c(A + B) = cA + cB$ (sifat distributif)

f. $c(A - B) = cA - cB$

g. $(c + d)A = cA + dA$

h. $(cd)A = c(dA)$ (sifat asosiatif)

12. Perkalian matriks dengan matriks

Jika A adalah matriks berordo $m \times n$ dan B adalah matriks berordo $n \times r$, Hasil kali A dan B adalah suatu matriks (misal C) yang memiliki ordo $m \times r$. Setiap elemen dari C (misal c_{ij}) diperoleh dari jumlah hasil kali unsur-unsur baris ke- i dari A dengan unsur-unsur kolom ke- j dari B .

13. Sifat-sifat yang berlaku pada perkalian matriks dengan matriks adalah

- a. $A(BC) = (AB)C$ (sifat asosiatif)
- b. $A(B + C) = AB + AC$ (sifat distributif)
- c. $(B + C)A = BA + CA$
- d. $A(B - C) = AB - AC$
- e. $(B - C)A = BA - CA$
- f. $AI = IA = A$ (memiliki matriks identitas)

14. Perpangkatan matriks

Jika A matriks bujur sangkar maka berlaku $A^2 = A.A$; $A^3 = A^2.A$ dan seterusnya

15. Misal matriks A merupakan matriks bujur sangkar, biasanya fungsi determinan disimbolkan dengan \det , jumlah semua hasil kali elementer dari A disimbolkan $\det(A)$ atau sering juga disimbolkan $|A|$, sementara jumlah $\det(A)$ merupakan determinan A .

16. Determinan matriks A berordo 2x2, dengan menggunakan

$$\text{hasil kali elementer adalah } \det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

17. Determinan matriks A berordo 3x3, dengan menggunakan hasil kali elementer (metode sarrus) adalah

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

18. Minor unsur a_{ij} yang dinotasikan dengan M_{ij} adalah determinan sub matriks setelah menghilangkan baris ke i dan kolom j dari A . Sementara itu kofaktor unsur a_{ij} adalah bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ yang dinotasikan dengan C_{ij} .

19. Misal A adalah matriks yang berukuran $m \times m$ serta $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq m$, maka berlaku

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{im}C_{im}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris i)

dan

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{mj}C_{mj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom j)

20. Invers matriks dari A adalah matriks B sehingga $AB = BA = I$, hal ini berlaku jika A adalah matriks bujur sangkar dan A dapat dibalik (*invertible*). Notasi untuk menyatakan invers

matriks A adalah A^{-1} . Sementara untuk mencari A^{-1} dapat menggunakan rumus

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{adj}(A)), \det(A) \neq 0$$

Keterangan:

$\text{adj}(A)$ = adjoin matriks A

$\text{adj}(A)$ diperoleh dari mentranspose matriks kofaktor (matriks yang terbentuk melalui kofaktor-kofaktor yang bersesuaian)

H. Latihan

1. Diberikan matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hitunglah

- a. AD c. $F + E$ e. $-4B$ g.
 $B^T - A^2$
- b. BE d. $E - F$ f. $2D + C^2$ h.
 $(BE)F$
2. Dengan menggunakan skalar $s = 2$ dan matriks-matriks pada nomor 1, tunjukkan hubungan-hubungan berikut
- a. $(kD)^t = kD^t$ d. $(CD)^t = D^t C^t$
- b. $(E + F)^t = E^t + F^t$ e. $(A^t)^t = A^2$
3. Apabila a_{ij} merupakan unsur pada baris i kolom j dari matriks A , tentukan di baris dan kolom mana a_{ij} akan muncul pada matriks A^t ?
4. Dengan menggunakan matriks-matriks pada nomor 1, carilah
- a. $\det(C) - \det(D)$
- b. $\det(E) + \det(F)$
5. Dengan menggunakan matriks-matriks pada nomor 1, buktikan bahwa hubungan-hubungan $(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$

dan $(EF)^{-1} = F^{-1}E^{-1}$ adalah berikut benar?. Apakah hubungan tersebut berlaku secara umum untuk sebarang dua matriks yang berukuran sama?. Jelaskan pendapat anda.

6. Misal A adalah matriks yang dapat dibalik dan invers dari $7A$ adalah

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

Tentukan, matriks A

7. Melalui ekspansi kofaktor, hitunglah determinan dari matriks-matriks berikut

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 7 & 0 \\ 2 & -3 & 9 & -4 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 0 & 9 \\ 1 & -5 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Identifikasilah matriks dari

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

BAB VI

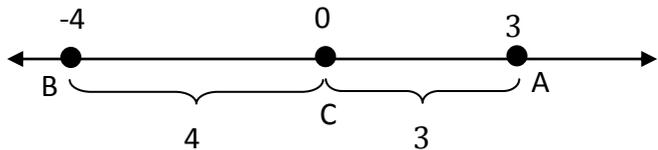
PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN NILAI MUTLAK

A. Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari, kemanapun tujuan kita dan dimanapun kita berada. Ketika kita sudah sampai pada tempat tujuan, jarak sebagai ukuran lintasan yang kita lalui selalu bernilai positif. Konsep ini dalam matematika direpresentasikan dengan nilai mutlak. Dalam pembahasan kalkulus dasar, istilah ini akan sering kita dengar termasuk juga persamaan atau pertidaksamaan yang memuat nilai mutlak suatu bilangan real, misal $|x - 2| < 3$, $|2x - 3| > |x - 8|$, dst. Setelah membaca bab ini mahasiswa diharapkan dapat memahami definisi nilai mutlak, mampu memecahkan masalah persamaan atau pertidaksamaan nilai mutlak.

B. Pengertian Nilai Mutlak

Kita perhatikan ilustrasi jarak sebagai dasar pengertian nilai mutlak.



- Jarak dari titik A = 3 ke titik C = 0 adalah $3 - 0 = 3$
- Jarak dari titik B = -4 ke titik C = 0 adalah $0 - (-4) = 4$

Dari ilustrasi tersebut juga menunjukkan bahwa seluruh bilangan di kanan titik C, misal $a > 0$ memiliki jarak positif dengan titik C. Demikian juga dengan seluruh bilangan di kiri titik B, misal $b < 0$ memiliki jarak positif dengan titik C. Jadi jarak seluruh bilangan dengan titik C, di kanan atau dikiri titik C, memiliki jarak yang selalu positif. Hal ini lah yang mengilhami definisi nilai mutlak di bawah ini.

Suatu bilangan real x yang ditulis sebagai $|x|$ adalah

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0 \\ -x, & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Contoh 6.1

1. $|5| = 5$
2. $|-6| = -(-6) = 6$

Penulis sengaja memberikan konsep nilai mutlak hanya pada pemahaman konsep jarak dan definisi nilai mutlak karena buku ini ditujukan untuk pemahaman matematika dasar mahasiswa. Beberapa konsep nilai mutlak lain, penulis jelaskan sebagai alternatif pemecahan agar lebih aplikatif.

C. Persamaan dan Pertidaksamaan Nilai Mutlak

Setelah memahami konsep dasar nilai mutlak, sekarang kita akan berlatih memecahkan persoalan nilai mutlak dalam bentuk persamaan dan pertidaksamaan melalui contoh-contoh dan berbagai alternatif pemecahan yang mungkin.

Contoh 6.2

Berapa kelipatan dari nilai-nilai x yang memenuhi persamaan

$$|x - 2| = 3 ?$$

Cara 1 (Menggunakan definisi nilai mutlak)

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{jika } x \geq 2 \\ -x + 2, & \text{jika } x < 2 \end{cases}$$

Kemungkinan I

$$x - 2 = 3$$

$$x = 5$$

Karena irisan dari $x = 5$, $x \geq 2$ adalah 5 maka HP I = {5}

Kemungkinan II

$$-x + 2 = 3$$

$$x = -1$$

Karena irisan dari $x = -1$ dan $x < 2$ adalah -1 maka HP II = $\{-1\}$

Himpunan Penyelesaiannya adalah gabungan dari HP I dan HP II = $\{5, -1\}$

Jadi kelipatan dari nilai-nilai x yang dimaksud adalah

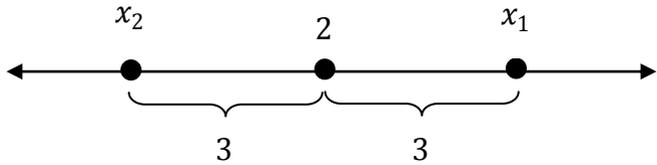
Untuk $x = 5$, maka kelipatannya : 5,10,15,20,25,.....

Untuk $x = -1$, maka kelipatannya : -1,-2,-3,-4,-5,.....

Cara 2 (Menggunakan “konsep jarak”)

Artinya ada 2 titik misal x_1 dan x_2 yang berjarak 3 satuan dari titik bernilai 2 di sebelah kiri dan kananya, yang dapat

direpresentasikan dengan menggunakan garis bilangan berikut.



Maka nilai x_1 dan x_2 adalah:

$$x_1 - 2 = 3 \text{ atau } 2 - x_2 = 3$$

$$x_1 = 5 \text{ atau } x_2 = -1$$

Sehingga, Himpunan Penyelesaiannya = $\{5, -1\}$

Jadi kelipatan dari nilai-nilai x yang dimaksud adalah

Untuk $x_1 = 5$, maka kelipatannya : 5,10,15,20,25,.....

Untuk $x_2 = -1$, maka kelipatannya : -1,-2,-3,-4,-5,.....

Cara 3 (Menggunakan “dikuadratkan ke-2 ruas”)

$$(|x - 2|)^2 = 3^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = 9$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x - 5)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = 5 \vee x_2 = -1$$

Sehingga, Himpunan Penyelesaiannya = $\{5, -1\}$

Jadi kelipatan dari nilai-nilai x yang dimaksud adalah

Untuk $x_1 = 5$, maka kelipatannya : 5,10,15,20,25,.....

Untuk $x_2 = -1$, maka kelipatannya : -1,-2,-3,-4,-5,.....

Contoh 6.3

Berapa jumlah dari nilai-nilai x yg memenuhi persamaan

$$|3x + 2| = |x + 2| ?$$

Cara 1 (Menggunakan definisi nilai mutlak)

$$|3x + 2| = \begin{cases} 3x + 2, & \text{jika } x \geq -\frac{2}{3} \\ -3x - 2, & \text{jika } x < -\frac{2}{3} \end{cases} \quad |x + 2| = \begin{cases} x + 2, & \text{jika } x \geq -2 \\ -x - 2, & \text{jika } x < -2 \end{cases}$$

Kemungkinan I

$$3x + 2 = x + 2$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

Karena irisan dari $x = 0$, $x \geq -\frac{2}{3}$, $x \geq -2$ adalah 0 maka HP I

$$= \{0\}$$

Kemungkinan II

$$3x + 2 = -x - 2$$

$$4x = -4$$

$$x = -1$$

Karena irisan dari $x = -1$, $x \geq -\frac{2}{3}$, $x < -2$ adalah \emptyset maka

$$\text{HP II} = \emptyset$$

Kemungkinan III

$$-3x - 2 = x + 2$$

$$-4x = 4$$

$$x = -1$$

Karena irisan dari $x = -1, x < -\frac{2}{3}, x \geq -2$ adalah -1 maka

$$\text{HP III} = \{-1\}$$

Kemungkinan IV

$$-3x - 2 = -x - 2$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

Karena irisan dari $x = 0, x < -\frac{2}{3}, x < -2$ adalah \emptyset maka HP

$$\text{IV} = \emptyset$$

Himpunan Penyelesaiannya adalah gabungan dari HP I sampai

$$\text{HP IV} = \{0, -1\}$$

Jadi, jumlah dari nilai-nilai x yang dimaksud adalah

$$0 + (-1) = -1$$

Cara 2 (Menggunakan “dikuadratkan ke-2 ruas”)

$$(|3x + 2|)^2 = (|x + 2|)^2$$

$$9x^2 + 12x + 4 = x^2 + 4x + 4$$

$$8x^2 + 8x = 0$$

$$8x(x + 1) = 0$$

$$x_1 = 0 \vee x_2 = -1$$

Sehingga, Himpunan Penyelesaiannya = $\{0, -1\}$

Jadi, jumlah dari nilai-nilai x yang dimaksud adalah

$$0 + (-1) = -1$$

Contoh

Contoh 6.4

Berapa nilai x yang memenuhi persamaan $|x - 4| = 2x + 1$?

Cara 1 (Menggunakan definisi nilai mutlak)

$$|x - 4| = \begin{cases} x - 4, & \text{jika } x \geq 4 \\ -x + 4, & \text{jika } x < 4 \end{cases}$$

Kemungkinan I

$$x - 4 = 2x + 1$$

$$-x = 5$$

$$x = -5$$

Karena irisan dari $x = -5, x \geq 4$ adalah \emptyset maka HP I = \emptyset

Kemungkinan II

$$-x + 4 = 2x + 1$$

$$-3x = -3$$

$$x = 1$$

Karena irisan dari $x = 1, x < 4$ adalah 1 maka HP II = $\{1\}$

Himpunan Penyelesaiannya adalah gabungan dari HP I dan HP

$$\text{II} = \{1\}$$

Jadi nilai x yang dimaksud adalah 1

Cara 2 (Menggunakan "dikuadratkan ke-2 ruas")

$$(|x - 4|)^2 = (2x + 1)^2, \text{ dengan syarat } 2x + 1 \geq 0 \rightarrow x \geq$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$x^2 - 8x + 16 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$3x^2 + 12x - 15 = 0$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$(x + 5)(x - 1)$$

$$x_1 = -5 \vee x_2 = 1$$

Karena syaratnya harus $x \geq -\frac{1}{2}$, maka Himpunan Penyelesaiannya adalah $\{1\}$

Jadi nilai x yang dimaksud adalah 1

Contoh 6.5

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $|x + 2| = |x - 1|$!

Cara I (Menggunakan definisi nilai mutlak)

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2, & \text{jika } x \geq -2 \\ -x - 2, & \text{jika } x < -2 \end{cases}$$

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{jika } x \geq 1 \\ -x + 1, & \text{jika } x < 1 \end{cases}$$

Kemungkinan I

$$x + 2 = x - 1$$

$$0 = -3$$

$$\text{HP I} = \emptyset$$

Kemungkinan II

$$x + 2 = -x + 1$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Karena irisan dari $x = -\frac{1}{2}$, $x \geq -2$, $x < 1$ adalah $-\frac{1}{2}$ maka

$$\text{HP II} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Kemungkinan III

$$-x - 2 = x - 1$$

$$-2x = 1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Karena irisan dari $x = -\frac{1}{2}$, $x < -2$, $x \geq 1$ adalah \emptyset maka HP

$$\text{III} = \emptyset$$

Kemungkinan IV

$$-x - 2 = -x + 1$$

$$0 \neq 3$$

$$\text{HP IV} = \emptyset$$

Jadi Himpunan Penyelesaiannya adalah gabungan dari HP I -

$$\text{HP IV yakni } \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Cara II (Menggunakan "dikuadratkan ke-2 ruas")

$$(|x + 2|)^2 = (|x - 1|)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 - 2x + 1$$

$$6x = -3$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Jadi, Himpunan Penyelesaiannya adalah $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Contoh 6.6

Berapa jumlah dari nilai-nilai bilangan bulat x yang memenuhi pertidaksamaan $|3x - 2| < 5$?

Cara 1 (Menggunakan definisi nilai mutlak)

$$|3x - 2| = \begin{cases} 3x - 2, & \text{jika } x \geq \frac{2}{3} \\ -3x + 2, & \text{jika } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Kemungkinan I

$$|3x - 2| < 5$$

$$x < \frac{7}{3}$$

HP I adalah irisan dari $x < \frac{7}{3}$, $x \geq \frac{2}{3}$ yakni $= \left\{ x \mid \frac{2}{3} \leq x < \frac{7}{3}, x \in \right.$

R

Kemungkinan II

$$-3x + 2 < 5$$

$$-3x < 3$$

$$x > -1$$

HP II adalah irisan dari $x > -1$, $x < \frac{2}{3}$ yakni $= \left\{ x \mid -1 < x < \right.$

$\frac{2}{3}, x \in$

Himpunan penyelesaiannya adalah gabungan dari HP I dan HP II yakni

$$= \left\{ x \mid -1 < x < \frac{7}{3}, x \in R \right\}$$

Bilangan-bilangan bulat pada himpunan penyelesaian tersebut adalah 0,1,2

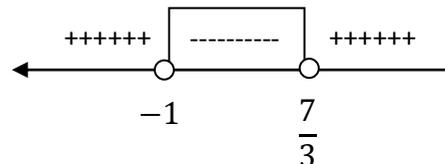
Jadi jumlah dari nilai-nilai bilangan bulat x yang dimaksud adalah $0 + 1 + 2 = 3$

Cara 2 (Menggunakan "dikuadratkan ke-2 ruas")

$$(|3x - 2|)^2 < 5^2$$

$$9x^2 - 12x + 4 < 25$$

$$9x^2 - 12x - 21 < 0$$



$$3x^2 - 4x - 7 < 0$$

$$xx_{1,2} = \frac{4 \pm 10}{6} \text{ maka } x_1 = -1 \vee x_2 = \frac{7}{3}$$

$$\text{Himpunan Penyelesaiannya} = \left\{ x \mid -1 < x < \frac{7}{3}, x \in R \right\}$$

Bilangan-bilangan bulat pada himpunan penyelesaian tersebut adalah 0,1,2

Jadi jumlah dari nilai-nilai bilangan bulat x yang dimaksud adalah $0 + 1 + 2 = 3$

Cara 3 (Menggunakan teorema)

$$|3x - 2| < 5$$

$$-5 < 3x - 2 < 5$$

$$-3 < 3x < 7$$

$$-1 < x < \frac{7}{3}$$

$$\text{Himpunan Penyelesaiannya} = \left\{ x \mid -1 < x < \frac{7}{3}, x \in R \right\}$$

Bilangan-bilangan bulat pada himpunan penyelesaian tersebut adalah 0,1,2

Jadi jumlah dari nilai-nilai bilangan bulat x yang dimaksud adalah $0 + 1 + 2 = 3$

Contoh 6.7

Berapa jumlah dari nilai-nilai bilangan bulat x yang memenuhi pertidaksamaan $|2x + 3| > 3$?

Cara 1 (Menggunakan definisi nilai mutlak)

$$|2x + 3| = \begin{cases} 2x + 3, & \text{jika } x \geq -\frac{3}{2} \\ -2x - 3, & \text{jika } x < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Kemungkinan I

$$2x + 3 > 3$$

$$x > 0$$

HP I adalah irisan dari $x > 0$, $x \geq -\frac{3}{2}$ yakni $\{x > 0\}$

Kemungkinan II

$$-2x - 3 > 3$$

$$-2x > 6$$

$$x < -3$$

HP II adalah irisan dari $x < -3$, $x < -\frac{3}{2}$ yakni $\{x < -3\}$

Himpunan penyelesaiannya adalah gabungan dari HP I dan HP II yakni

$$= \{x \mid x < -3 \vee x > 0, x \in R\}$$

Bilangan-bilangan bulat pada himpunan penyelesaian tersebut

Untuk $x < -3$ adalah $-4, -5, -6, -7, -8, \dots$ atau

Untuk $x > 0$ adalah $1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Jadi jumlah dari nilai-nilai bilangan bulat x yang dimaksud adalah \sim (tak hingga banyak).

Cara 2 (Menggunakan "dikuadratkan ke-2 ruas")

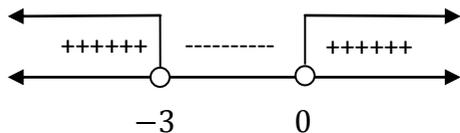
$$(|2x + 3|)^2 > 3^2$$

$$4x^2 + 12x + 9 > 9$$

$$4x^2 + 12x > 0$$

$$4x(x + 3) > 0$$

$$x = -3 \vee x = 0$$



Himpunan Penyelesaian = $\{x | x < -3 \vee x > 0, x \in R\}$

Bilangan-bilangan bulat pada himpunan penyelesaian tersebut

Untuk $x < -3$ adalah $-4, -5, -6, -7, -8, \dots$ atau

Untuk $x > 0$ adalah $1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Jadi jumlah dari nilai-nilai bilangan bulat x yang dimaksud adalah \sim (tak hingga banyak).

Cara 3 (Menggunakan teorema)

$|2x + 3| > 3$, maka

$2x + 3 > 3$ atau $2x + 3 < -3$

$$x > 0 \qquad x < -3$$

Himpunan Penyelesaian = $\{x | x < -3 \vee x > 0, x \in R\}$

Bilangan-bilangan bulat pada himpunan penyelesaian tersebut

Untuk $x < -3$ adalah $-4, -5, -6, -7, -8, \dots$ atau

Untuk $x > 0$ adalah $1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Jadi jumlah dari nilai-nilai bilangan bulat x yang dimaksud adalah \sim (tak hingga banyak).

D. Rangkuman

Definisi Nilai Mutlak

Suatu bilangan real x yang ditulis sebagai $|x|$ adalah

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0 \\ -x, & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

E. Latihan

Kerjakan latihan soal berikut dengan menggunakan cara definisi nilai mutlak atau cara lain seperti pada contoh sebelumnya.

1. Berapa jumlah dari nilai x yg memenuhi persamaaan

$$\left| \frac{x}{2} + 2 \right| = |3x + 5| + 3 ?$$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan

$$|x + 2| - 1 = |x + 4| + 1 ?$$

3. Berapa banyak nilai x berbeda yang memenuhi persamaan

$$|5 - 3x| = x - 2 ?$$

4. Berapa jumlah dari nilai-nilai bilangan bulat x yang memenuhi pertidaksamaan $|3x + 4| < -6$?

5. Berapa nilai dari bilangan asli x yang memenuhi

$$\text{pertidaksamaan } \left| \frac{-1}{x-2} \right| \geq \frac{1}{6} ?$$

BAB VII

LIMIT DAN KEKONTINUAN

A. Pendahuluan

Limit dan kekontinuan merupakan konsep dasar sebelum membahas tentang kalkulus, konsep limit harus dipahami terlebih dahulu sebelum membahas tentang turunan dan integral. Seringkali definisi limit sulit dipahami dengan pendekatan formal (baku), sehingga dalam buku ini, definisi limit dibangun terlebih dahulu secara intuitif.

Setelah membaca bab ini mahasiswa diharapkan memahami pengertian limit, sifat-sifat limit, limit bentuk tak tentu dan tentu, limit bentuk trigonometri, dan kekontinuan, serta dapat menggunakannya dalam pemecahan masalah.

B. Pengertian Limit

Diberikan fungsi yang ditentukan oleh

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x - 1)}$$

Fungsi tersebut tidak terdefinisi pada $x = 1$ karena $f(1) = \frac{0}{0}$ namun yang terjadi pada $f(x)$ pasti berbeda jika x adalah suatu bilangan yang mendekati 1. Untuk melihat perbedaan tersebut, perhatikan tabel di bawah.

x	0,8	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,2
$f(x)$	1,8	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,2

Perhatikan jika $f(x)$ didekati oleh bilangan-bilangan yang mendekati $x = 1$ dari kiri atau kanan, maka nilai $f(x)$ semakin mendekati 2. Artinya jika kita tentukan suatu bilangan x yang semakin mendekati 1 tapi bukan 1, maka $f(x)$ akan dekat ke 2. Pengertian ini memunculkan definisi limit secara intuitif

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ adalah apabila x dekat tapi bukan a , maka $f(x)$ dekat ke L .

Definisi di atas mempermudah pemahaman kita tentang pengertian limit, namun juga memunculkan pertanyaan, apakah syarat yang digunakan agar $L = 2$ sedekat-dekatnya dengan $x = 1$?. Oleh karena itu definisi secara intuitif memiliki kelemahan, sehingga kita butuh definisi yang lebih baku.

Definisi Limit

Fungsi f dikatakan memiliki limit L pada $x = a$ dalam domain D yang ditulis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, jika pada setiap bilangan positif ϵ dapat ditentukan bilangan kecil positif δ , sehingga untuk semua x dalam domain D yang memenuhi $0 < |x - a| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \epsilon$.

Dengan menggunakan definisi limit ini, pada fungsi f di atas artinya jika ditentukan bilangan positif $e = 0,0003$. Kita dapat menentukan bilangan kecil positif $d = \frac{1}{2}e = 0,0015$ sehingga untuk setiap x yang memenuhi $0 < |x - 1| < d$ berlaku $|f(x) - 2| < e$.

C. Sifat-Sifat Limit

Andaikan n adalah bilangan bulat positif, k adalah konstanta, f dan g adalah masing-masing fungsi yang memiliki limit di a . Maka sifat-sifat limit berikut dapat digunakan

1. $\lim_{x \rightarrow a} k = k$
2. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
3. $\lim_{x \rightarrow a} [kf(x)] = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
5. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
6. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
7. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, syarat $[\lim_{x \rightarrow a} g(x)] \neq 0$
8. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$
9. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$, syarat $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$ dan n genap

Berikut dijelaskan penggunaan beberapa sifat limit melalui contoh-contoh

Contoh 7.1

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 2} 3x^5$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} 3x^5 &= 3 \lim_{x \rightarrow 2} x^5 \quad (\text{sifat 3}) \\ &= 3[\lim_{x \rightarrow 2} x]^5 \quad (\text{sifat 8}) \\ &= 3[2]^5 = 96 \quad (\text{sifat 2}) \end{aligned}$$

Contoh 7.2

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 1} (4x + 2x^3)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (4x + 2x^3) &= \lim_{x \rightarrow 1} 4x + \lim_{x \rightarrow 1} 2x^3 \\ &\quad (\text{sifat 4}) \\ &= 4\lim_{x \rightarrow 1} x + 2\lim_{x \rightarrow 1} x^3 \\ &\quad (\text{sifat 3}) \\ &= 4 + 2[\lim_{x \rightarrow 1} x]^3 \\ &\quad (\text{sifat 8}) \\ &= 4 + 2[1]^3 = 6 \\ &\quad (\text{sifat 2}) \end{aligned}$$

Contoh 7.3

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x+3}}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x+3}} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[4]{x}}{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+3}} \quad (\text{sifat 7}) \\ &= \frac{\sqrt[4]{\lim_{x \rightarrow 1} x}}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} (x+3)}} \quad (\text{sifat 9}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 3}} && \text{(sifat 4)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+3}} && \text{(sifat 1)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa proses pengerjaan dengan cara seperti di atas bahwa setiap langkah harus menyesuaikan sifat-sifat terkait cukup memakan waktu. Selain itu jika nilai-nilai $x = a$ langsung disubstitusikan pada $f(x)$, maka nilai limit yang diperoleh sama dengan nilai limit pada contoh di atas.

Misal pada contoh 7.1

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x^5 = 3 \cdot 2^5 = 96$$

Oleh karena itu, teorema substitusi berikut dapat dipakai sebagai sebuah strategi penyelesaian limit. Coba Lakukan hal yang sama pada contoh 7.2 dan 7.3 sebagai latihan, apakah akan menghasilkan hasil yang sama? Limit yang anda kerjakan semuanya menghasilkan bilangan real, ketahuilah bahwa limit semacam ini disebut **limit tentu**.

Teorema Substitusi

Jika f suatu fungsi polinom atau fungsi rasional, maka

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(c)$$

Asalkan $f(a)$ terdefinisi dan dalam kasus fungsi rasional nilai penyebut di c tidak nol.

D. Limit Bentuk Tak Tentu

Apabila dengan menggunakan teorema substitusi pada suatu limit dimana $f(x)$ dan x mendekati a , sehingga nilai $f(a)$ adalah $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty + \infty$, $\infty - \infty$, atau 1^∞ (∞ adalah bilangan tak hingga), maka limit semacam ini disebut sebagai limit bentuk tak tentu.

Pendekatan yang digunakan untuk mencari penyelesaian limit bentuk tak tentu adalah dengan memanipulasi bentuk tak tentu sehingga menjadi bentuk tentu dengan strategi tertentu. Strategi tersebut dapat dilakukan dengan cara faktorisasi, mengalikan akar senama, membagi pembilang dan penyebut dengan peubah yang memiliki pangkat tertinggi dari fungsi sehingga terjadi kanselasi.

Pendekatan lain adalah dengan menggunakan rumus De L'Hospital (akan dibahas lebih lanjut pada **BAB TURUNAN**), pendekatan ini tidak dapat dibahas dalam bab ini karena kita masih belum memiliki konsep yang cukup mengenai turunan suatu fungsi.

Berikut dijelaskan beberapa contoh kasus dan penyelesaiannya.

Contoh 7.4

Carilah $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 3x}$ (terapkan teorema substitusi maka diperoleh $\frac{0}{0}$)

Maka

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{3x(x-1)} \quad (\text{faktorkan bentuk}$$

kuadrat)

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{3x} \quad (\text{kanselasi } (x -$$

1))

$$= \frac{1+1}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3}$$

Contoh 7.5

Carilah $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{2 - \sqrt{x+4}}$

Maka

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{2 - \sqrt{x+4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{2 - \sqrt{x+4}} \cdot \frac{2 + \sqrt{x+4}}{2 + \sqrt{x+4}} \quad (\text{kalikan } \text{akar}$$

sekawan)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2x)(2 + \sqrt{x+4})}{4 - (x+4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2)(2 + \sqrt{x+4})}{-x} \quad (\text{kanselasi}$$

$-x$)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -(x+2)(2 + \sqrt{x+4})$$

$$= -8$$

Contoh 7.6

Diberikan $g(x) = y^2 - 2y$, carilah $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(5) + g(r-8)}{r}$

Maka

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(5) + g(r-8)}{r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{15 + (r-1)^2 - 2(r-8)}{r}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{15+r^2-2r+1-2r+16}{r} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r^2-4r}{r} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(r-4)}{r} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} r - 4 \\
&= -4
\end{aligned}$$

Contoh 7.7

Carilah $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2+7x+8}{3x^2-9}$

Maka

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2+7x+8}{3x^2-9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^2}{x^2} + \frac{7x}{x^2} + \frac{8}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{9}{x^2}} \quad (\text{Bagi setiap suku}$$

dengan x^2)

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}}{3 - \frac{9}{x^2}} \\
&= \frac{6+0+0}{3-0} \quad (\text{setiap bilangan real}
\end{aligned}$$

dibagi ∞ adalah 0)

$$= 2$$

Contoh 7.8

Carilah $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3+7x+8}{3x^2-9}$

Maka

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3+7x+8}{3x^2-9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^3}{x^3} + \frac{7x}{x^3} + \frac{8}{x^3}}{\frac{3x^2}{x^3} - \frac{9}{x^3}} \quad (\text{Bagi setiap suku}$$

dengan x^3)

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{7}{x^2} + \frac{8}{x^3}}{\frac{3}{x} - \frac{9}{x^3}} \\
&= \frac{6+0+0}{0-0} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Contoh 7.9

Carilah $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+8}{3x^2-9}$

Maka

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+8}{3x^2-9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x}{x^2} + \frac{8}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{9}{x^2}} \quad (\text{Bagi setiap suku dengan } x^2)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{x} + \frac{8}{x^2}}{3 - \frac{9}{x^2}} \\
&= \frac{0+0+0}{3-0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Contoh 7.7-7.9 dapat dicermati bahwa setelah disubstitusi limit mengarah pada bentuk $\frac{\infty}{\infty}$, yang membedakan hanya pada pangkat tertinggi kofaktor pembilang dan penyebut. Perbedaan tersebut membuat pola-pola berikut yang dapat digunakan sebagai strategi penyelesaian limit bentuk tak hingga.

- (1) Jika pembilang dan penyebut merupakan suku banyak yang pangkat tertingginya sama (seperti contoh 7.7),

maka nilai limitnya adalah hasil bagi antara kofaktor pangkat tertinggi pembilang dengan kofaktor penyebut.

- (2) Jika pangkat pembilang suku banyak lebih tinggi dari pangkat penyebutnya (seperti contoh 7.8), maka nilai limitnya adalah ∞ . Apabila dicermati nilai ini karena koefisien x^3 positif, sehingga andaikan koefisien x^3 negatif maka nilai limitnya adalah $-\infty$.
- (3) Jika pangkat pembilang suku banyak lebih rendah dari pangkat penyebutnya (seperti contoh 7.9), maka nilai limitnya adalah 0.

E. Limit Bentuk Trigonometri

Pada fungsi trigonometri, untuk setiap bilangan real a dalam domain berlaku

1. $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$
2. $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$
3. $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \sin a$
4. $\lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a$
5. $\lim_{x \rightarrow a} \sec x = \sec a$
6. $\lim_{x \rightarrow a} \csc x = \csc a$

Dalam limit bentuk trigonometri berlaku juga jika setelah diperiksa dengan teorema substitusi, hasilnya tidak mengarah pada limit bentuk tak tentu, maka hasil substitusi tersebut dapat diterima sebagai hasil penyelesaian. Berikut diberikan

contoh-contoh soal beserta penyelesaian limit bentuk trigonometri.

Contoh 7.10

Tentukan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin x}{x-1}$

Maka

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin x}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^3}{x-1} \sin x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^3}{x-1} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow 0} [\sin x] \\ &= 0 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

F. Kekontinuan

Definisi Kekontinuan

Fungsi f dikatakan kontinu untuk $x = a$, jika memenuhi syarat-syarat

- (1) $f(a)$ ada (dapat ditentukan nilainya)
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ada
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Jika salah satu syarat tersebut tidak terpenuhi, maka fungsi f untuk $x = a$ tidak dikatakan kontinu atau dengan kata lain disebut diskontinu.

Contoh 7.11

Diketahui $f(x) = 3x - 2$, periksalah apakah $f(x)$ kontinu pada $x = 4$?

Penyelesaian

Berdasarkan definisi

$$(1) f(4) = 10$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 4} 3x - 2 = 10$$

$$(3) f(4) = \lim_{x \rightarrow 4} 3x - 2$$

Ya, $f(x)$ kontinu pada $x = 4$

Contoh 7.12

Diberikan $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ untuk $x < 2$

$$g(x) = 4 \quad \text{untuk } x = 2$$

$$g(x) = 2x - 1 \quad \text{untuk } x > 2$$

Selidikilah apakah $g(x)$ kontinu pada $x = 2$?

Penyelesaian

Berdasarkan definisi

$$(1) g(2) = 4$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2}x^2 + 1 = 3 \quad (x \text{ mendekati } 2 \text{ dari kiri})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} 2x - 1 = 3 \quad (x \text{ mendekati } 2 \text{ dari kanan})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2}x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2}x^2 + 1$$

$$(3) g(2) \neq \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

Dari analisa di atas $g(x)$ diskontinu pada $x = 2$

G. Rangkuman

1. Definisi Limit

Fungsi f dikatakan memiliki limit L pada $x = a$ dalam domain D yang ditulis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, jika pada setiap bilangan positif e dapat ditentukan bilangan kecil positif d , sehingga untuk semua x dalam domain D yang memenuhi $0 < |x - a| < d$ berlaku $|f(x) - L| < e$.

2. Andaikan n adalah bilangan bulat positif, k adalah konstanta, f dan g adalah masing-masing fungsi yang memiliki limit di a . Maka sifat-sifat limit berikut dapat digunakan

a. $\lim_{x \rightarrow a} k = k$

b. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

c. $\lim_{x \rightarrow a} [kf(x)] = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

d. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

e. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

f. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

g. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, syarat $[\lim_{x \rightarrow a} g(x)] \neq 0$

h. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}, \quad \text{syarat}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0 \text{ dan } n \text{ genap}$$

3. Teorema Substitusi

Jika f suatu fungsi polinom atau fungsi rasional, maka

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(c)$$

Asalkan $f(a)$ terdefinisi dan dalam kasus fungsi rasional nilai penyebut di c tidak nol.

4. Apabila dengan menggunakan teorema substitusi pada suatu limit dimana $f(x)$ dan x mendekati a , sehingga nilai $f(a)$ adalah $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty + \infty$, $\infty - \infty$, atau 1^∞ (∞ adalah bilangan tak hingga), maka limit semacam ini disebut sebagai limit bentuk tak tentu.
5. Pada fungsi trigonometri, untuk setiap bilangan real a dalam domain berlaku
 - a. $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$
 - b. $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$
 - c. $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \sin a$
 - d. $\lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a$
 - e. $\lim_{x \rightarrow a} \sec x = \sec a$
 - f. $\lim_{x \rightarrow a} \csc x = \csc a$
6. Definisi Kekontinuan
Fungsi f dikatakan kontinu untuk $x = a$, jika memenuhi syarat-syarat
 - a. $f(a)$ ada (dapat ditentukan nilainya)
 - b. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ada
 - c. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

H. Latihan

1. Hitunglah limit berikut

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x - 4}{2x - 4}$

d. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x$

b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{3x^2 - 12}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{x + 1}$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$

2. Jika $f(x) = 3x^2 - 2x$. Carilah $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+4) - f(4)}{x}$

3. Diberikan

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} \quad \text{untuk } x > 0$$

$$f(x) = 2 \quad \text{untuk } x = 0$$

$$f(x) = 2x - \frac{1}{2} \quad \text{untuk } x < 0$$

a. Selidikilah menggunakan definisi kekontinuan, apakah

$f(x)$ kontinu pada $x = 0$?

b. Gambarlah grafik $f(x)$

BAB VIII

TURUNAN

A. Pendahuluan

Turunan sebagai materi kalkulus merupakan pondasi utama untuk mempelajari materi kalkulus lain, yakni integral. Turunan memiliki banyak aplikasi dalam kehidupan, diantaranya menentukan jarak, kecepatan, percepatan, dan waktu tempuh suatu benda. Namun dalam penggunaannya istilah turunan seringkali disalahartikan dengan diferensial. Dengan demikian, agar memahami turunan dan memiliki bekal yang cukup untuk mempelajari materi integral sebagai materi berikutnya, serta tidak terjadi kesalahan konsep. Maka dibutuhkan pemahaman mendalam tentang konsep turunan.

Diharapkan setelah mempelajari bab ini, mahasiswa dapat memahami pengertian turunan, aturan-aturan turunan, sifat-sifat turunan, turunan trigonometri, Teorema de' Hospital, kaidah rantai, dan turunan tingkat tinggi, serta penggunaannya dalam pemecahan masalah.

B. Pengertian Turunan

Definisi Turunan

Turunan suatu fungsi f adalah fungsi baru f' (f aksen) yang memiliki nilai pada sebarang bilangan c

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Asalkan nilai limit tersebut ada namun selain ∞ atau ∞

Fungsi f dikatakan terdiferensiasikan di c , apabila nilai limit di atas ada. Sementara pencarian turunannya disebut diferensiasi.

Selain menggunakan notasi $f'(x)$ untuk menyatakan turunan fungsi f terhadap x , ada notasi lain diantaranya adalah y' (notasi aksen), D_{xy} (notasi D), $\frac{dy}{dx}$ (notasi Leibniz). Notasi D seringkali digunakan dalam bab ini karena dipandang efektif sebagai operator dalam melakukan penurunan.

Notasi-notasi tersebut berbeda dengan dy , karena dy adalah notasi untuk menyatakan diferensial. Namun seringkali dy dimaknai sebagai notasi untuk menyatakan turunan pada y . Jadi anda sebagai pembaca harus berhati-hati untuk menggunakan notasi agar tidak terjadi miskonsepsi.

Contoh 8.1

Diberikan $f(x) = x^2 + 6$. Berapakah $f'(3)$?

Penyelesaian

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(3+h)^2 + 6] - 15}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(9 + 6h + h^2) + 6] - 15}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} 6 + h \\
&= 6 + 0 = 6
\end{aligned}$$

Contoh 8.2

Diberikan $f(x) = \sqrt{3x}$, $x > 0$. Carilah $f'(x)$?

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3(x+h)} - \sqrt{3x}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3(x+h)} - \sqrt{3x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x}}{\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x}} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h) - 3x}{h(\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x})} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h(\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x})} \\
&= \frac{3}{\sqrt{3x} + \sqrt{3x}} = \frac{3}{2\sqrt{3x}} = \frac{\sqrt{3x}}{2x}
\end{aligned}$$

Jadi turunan f yakni $f'(x) = \frac{\sqrt{3x}}{2x}$ dengan domain $(0, \infty)$

C. Aturan-aturan Turunan

Pencarian nilai turunan menggunakan definisi limit seperti contoh 8.1 dan 8.2 tentu memerlukan waktu yang relatif lama. Namun melalui proses itu, kita dapat mengetahui hasil turunan beberapa fungsi khusus sehingga dapat kita gunakan untuk mempercepat hitungan pada fungsi yang lain, hasil-hasil tersebut disebut sebagai aturan pencarian turunan. Berikut aturan pencarian turunan beserta contohnya.

1. Aturan Fungsi Konstanta

Jika $f(x) = k$, k suatu konstanta maka untuk sebarang x ,
 $f'(x) = 0$ atau dalam notasi D

$$D_x(k) = 0$$

2. Aturan Fungsi Identitas

Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$ atau dalam notasi D

$$D_x(x) = 1$$

Contoh 8.3

Diketahui $f(x) = -14$, $g(y) = y$, f dan g terdiferensiasi

Maka

$$D_x(-14) = 0 \text{ dan } D_y(y) = 1$$

3. Aturan Pangkat

Jika $f(x) = x^n$, n bilangan bulat positif, maka $f'(x) = nx^{n-1}$ atau dalam D

$$D_x(x^n) = nx^{n-1}$$

4. Aturan Kelipatan Konstanta

Jika k suatu konstanta dan f suatu fungsi yang terdiferensialkan, maka $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$ atau dalam notasi D

$$D_x[k \cdot f(x)] = k \cdot D_x f(x)$$

Contoh 8.4

Diberikan $f(x) = x^{70}$, $g(y) = -4x^3$, f dan g terdiferensiasi

Maka

$$D_x(x^{70}) = 70x^{69} \quad \text{dan} \quad D_y(-4x^3) = -4D_y(x^3) = -4 \cdot 3 \cdot x^2 = 12x^2$$

5. Aturan Jumlah

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ atau dalam notasi D

$$D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$$

6. Aturan Selisih

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$ atau dalam notasi D

$$D_x[f(x) - g(x)] = D_x f(x) - D_x g(x)$$

Contoh 8.5

Carilah $D_x(2x^4 + 5x^6 - 10)$

Maka

$$\begin{aligned}
& D_x(2x^4 + 5x^6 - 10) \\
&= D_x(2x^4 + 5x^6) - D_x(10) && \text{(aturan selisih)} \\
&= D_x(2x^4) + D_x(5x^6) - 0 && \text{(aturan jumlah dan konstanta)} \\
&= 2D_x(x^4) + 5D_x(x^6) && \text{(aturan kelipatan konstanta)} \\
&= 2.4x^3 + 5.6.x^5 && \text{(aturan pangkat)} \\
&= 8x^3 + 30x^5
\end{aligned}$$

7. Aturan Hasil Kali

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ atau dalam notasi D

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)D_xg(x) + g(x)D_xf(x)$$

Contoh 8.6

Carilah $D_x[(x^2 + 3)(4x^3 - x)]$

Maka

$$\begin{aligned}
& D_x[(x^2 + 3)(4x^3 - x)] \\
&= (x^2 + 3)D_x(4x^3 - x) + D_x(x^2 + 3)(4x^3 - x) \\
&= (x^2 + 3)(12x^2 - 1) + (2x)(4x^3 - x) \\
&= 12x^4 - x^2 + 36x^2 - 3 + 8x^4 - 2x^2 \\
&= 20x^4 + 33x^2 - 3
\end{aligned}$$

8. Aturan Hasil Bagi

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, $g(x) \neq 0$, maka $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ atau dalam

D

$$D_x \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{g^2(x)}$$

Contoh 8.7

Carilah $D_x \left[\frac{(x-1)}{(x^3-2)} \right]$

Maka

$$\begin{aligned} D_x \left[\frac{(x-1)}{(x^3-2)} \right] &= \frac{(x^3-2)D_x(x-1) - (x-1)D_x(x^3-2)}{(x^3-2)^2} \\ &= \frac{(x^3-2)(1) - (x-1)(3x^2)}{(x^3-2)^2} \\ &= \frac{x^3-2-3x^3+3x^2}{(x^3-2)^2} \\ &= \frac{-2x^3+3x^2-2}{(x^3-2)^2} \end{aligned}$$

D. Turunan Trigonometri

Bentuk dasar trigonometri adalah sinus dan kosinus, sama seperti sebelumnya dengan menggunakan definisi limit, turunan sinus dan kosinus pun dapat diketahui.

Jika $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$ terdiferensialkan maka

$$D_x(\sin x) = \cos x \text{ dan } D_x(\cos x) = -\sin x$$

Dari turunan sinus dan kosinus dapat dicari turunan fungsi-fungsi trigonometri yang lain, dengan menerapkan aturan pencarian turunan, sehingga diperoleh:

$$1. D_x \tan x = \sec^2 x$$

Bukti

$$\begin{aligned} D_x \tan x &= D_x \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] \\ &= \frac{(\cos x D_x \sin x) - (\sin x D_x \cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x \cos x) - (\sin x \cdot -\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x \end{aligned}$$

$$2. D_x \cot x = -\operatorname{csc}^2 x$$

Bukti ini diserahkan pada pembaca sebagai latihan. Coba buktikan.

$$3. D_x \sec x = \sec x \tan x$$

Bukti

$$\begin{aligned} D_x \sec x &= D_x \left[\frac{1}{\cos x} \right] \\ &= \frac{(\cos x \cdot D_x(1)) - (1 \cdot D_x \cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x \cdot 0) - (1 D_x \cos x)}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{0 - (-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x \cos x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \sec x \tan x
\end{aligned}$$

4. $D_x \csc x = -\csc x \cot x$

Bukti ini diserahkan pada pembaca sebagai latihan. Coba buktikan.

E. De L'Hospital

Seperti yang dikemukakan pada **BAB LIMIT** sebelumnya, penggunaan rumus De L'Hospital dapat digunakan untuk mencari limit bentuk tak tentu. Penggunaan rumus ini dilakukan dengan cara menurunkan masing-masing fungsi pembilang atau penyebut terhadap peubahnya sampai limit menjadi bentuk tentu. Misal pada $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x)$ dan $g(x)$ pada $x = a$ bernilai nol dan diferensiabel maka rumus De L'Hospital adalah

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

Dengan $n \in \text{asli } (1,2,3, \dots)$

Untuk lebih meyakinkan dan memahami penggunaan rumus De L'Hospital pada limit bentuk tak tentu, apakah nilai limit yang diperoleh melalui rumus De L'Hospital sama dengan dengan nilai limit pada contoh-contoh (7.4, 7.5, 7.7,

7.8, dan 7.9) **BAB LIMIT** sub limit bentuk tak tentu?.
 Pertanyaan ini akan selalu muncul bagi pembelajar yang kritis,
 jawaban dari pertanyaan tersebut adalah ya sama. Cermatilah
 contoh 8.8 berikut.

Contoh 8.8

Pada contoh 7.4 diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 3x} = \frac{2}{3}$$

Penyelesaian menggunakan De L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{6x - 3} = \frac{2 \cdot 1}{(6 \cdot 1) - 3} = \frac{2}{3}$$

Pada contoh 6.5 diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{2 - \sqrt{x + 4}} = -8$$

Penyelesaian menggunakan De L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{2 - \sqrt{x + 4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 2}{-\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x + 4}}} = \frac{2 \cdot 0 + 2}{-\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{0 + 4}}} = \frac{2}{-\frac{1}{4}} = -8$$

Pada contoh 7.7 diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 7x + 8}{3x^2 - 9} = 2$$

Penyelesaian menggunakan De L'Hopital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 7x + 8}{3x^2 - 9} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x + 7}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{6} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Pada contoh 7.8 diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 7x + 8}{3x^2 - 9} = \infty$$

Penyelesaian menggunakan De L'Hopital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 7x + 8}{3x^2 - 9} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x^2 + 7}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{36x}{6} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 6x \\ &= 6 \cdot \infty = \infty \end{aligned}$$

Pada contoh 7.9 diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 8}{3x^2 - 9} = 0$$

Penyelesaian menggunakan De L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 8}{3x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0}{6} = \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0$$

F. Aturan Rantai

Kadang bagian dalam suatu fungsi yang sudah diturunkan masih belum sederhana, sehingga perlu dilakukan penurunan lagi. Pada kasus semacam ini, kita membutuhkan aturan rantai.

Definisi Aturan Rantai

Misal $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Jika f terdiferensialkan di u dan g terdiferensialkan di x , maka fungsi komposit $f \circ g$ didefinisikan oleh $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ terdiferensialkan di x dan

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Maka

$$D_x(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

Atau dalam notasi D

$$D_x y = D_u y D_x u$$

Atau dalam Leibniz

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Contoh 8.9

Tentukan $D_x y$ dari $y = (7x^3 - 5x^2)^{10}$

Penyelesaian

Misal $u = 7x^3 - 5x^2$ dan $y = u^{10}$. Sehingga

$$\begin{aligned} D_x y &= D_u u^{10} D_x (7x^3 - 5x^2) \\ &= 10u^9 (21x^2 - 10x) \\ &= 10(7x^3 - 5x^2)^9 (21x^2 - 10x) \end{aligned}$$

Contoh 8.10

Diberikan $y = \cos(x^2 - 7)$. Hitunglah $\frac{dy}{dx}$

Penyelesaian

Misal $u = x^2 - 7$ dan $y = \cos u$, maka

$$\frac{du}{dx} = 2x \text{ dan } \frac{dy}{du} = -\sin u$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin u \cdot 2x = [-\sin(x^2 - 7)][2x] = -2x \sin(x^2 - 7)$$

Ketahuilah bahwa aturan rantai tidak hanya digunakan sekali dalam satu permasalahan, bisa saja digunakan beberapa kali. Hal ini terjadi apabila masih menemui fungsi bagian dalam yang masih dapat diturunkan, seperti contoh berikut.

Contoh 8.11

Carilah $D_x \sin^8(3x^4)$

Penyelesaian

Misal $u = 3x^4$ dan $y = \sin^8 u$

$$D_x \sin^8(3x^4) = D_u \sin^8 u \cdot D_x 3x^4 \quad (\text{aturan rantai pertama})$$

$$= 8 \sin^7 u \cdot D_u \sin u \cdot 12x^3 \quad (\text{aturan rantai ke dua})$$

$$= 8 \sin^7(3x^4) \cdot \cos u \cdot 12x^3$$

$$= 8 \sin^7(3x^4) \cdot \cos(3x^4) \cdot 12x^3$$

$$= 8 \sin^7(3x^4) \cdot \cos(3x^4) \cdot 12x^3$$

$$= 96x^3 \sin^7(3x^4) \cos(3x^4)$$

G. Turunan Tingkat Tinggi

Sebelumnya telah dikenal notasi untuk menyatakan turunan dari $y = f(x)$ yakni $f'(x)$, y' , D_{xy} , dan $\frac{dy}{dx}$. Notasi-

notasi tersebut terbatas hanya untuk menyatakan nilai turunan fungsi yang pertama. Sangat dimungkinkan suatu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari akan melibatkan turunan fungsi lebih dari satu kali, turunan yang digunakan seperti ini disebut turunan tingkat tinggi.

Secara umum untuk menyatakan turunan ke n , $n \in \text{asli}$ pada notasi aksent menggunakan $f^{(n)}(x)$ atau $y^{(n)}$, sementara pada notasi D dan notasi Leibniz masing-masing menggunakan $D_x^n y$ dan $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Contoh 8.12

Diketahui $y = 2x^4 + \sin x$.

Tentukan $D_x y, D_x^2 y, D_x^3 y$

Penyelesaian

$$D_x y = D_x 2x^4 + D_x \sin x \quad (\text{Turunan pertama } y \text{ terhadap } x)$$

$$= 8x^3 + \cos x$$

$$D_x^2 y = D_x 8x^3 + D_x \cos x \quad (\text{Turunan ke dua } y \text{ terhadap } x)$$

$$= 24x^2 - \sin x$$

$$D_x^3 y = D_x 24x^2 - D_x \sin x \quad (\text{Turunan ke-tiga } y \text{ terhadap } x)$$

$$= 48x - \cos x$$

H. Rangkuman

1. Definisi Turunan

Turunan suatu fungsi f adalah fungsi baru f' (f aksen) yang memiliki nilai pada sebarang bilangan c

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Asalkan nilai limit tersebut ada namun selain ∞ atau ∞

2. Notasi untuk menyatakan turunan suatu fungsi f terhadap x diantaranya adalah $f'(x)$, y' (notasi aksen), D_{xy} (notasi

D), $\frac{dy}{dx}$ (notasi Leibniz).

3. Aturan-Aturan Turunan

c. Aturan Fungsi Konstanta

Jika $f(x) = k$, k suatu konstanta maka untuk sebarang x , $f'(x) = 0$ atau dalam notasi D adalah $D_x(k) = 0$

d. Aturan Fungsi Identitas

Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$ atau dalam notasi D adalah $D_x(x) = 1$

e. Aturan Pangkat

Jika $f(x) = x^n$, n bilangan buaat positif, maka $f'(x) = nx^{n-1}$ atau dalam notasi D adalah $D_x(x^n) = nx^{n-1}$

f. Aturan Kelipatan Konstanta

Jika k suatu konstanta dan f suatu fungsi yang terdiferensialkan, maka $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$ atau dalam notasi D adalah $D_x[k \cdot f(x)] = k \cdot D_x f(x)$

g. Aturan Jumlah

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ atau dalam notasi D adalah

$$D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$$

h. Aturan Selisih

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$ atau dalam notasi D adalah

$$D_x[f(x) - g(x)] = D_x f(x) - D_x g(x)$$

i. Aturan Hasil Kali

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ atau dalam notasi D adalah

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x)$$

j. Aturan Hasil Bagi

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, $g(x) \neq 0$, maka $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ atau dalam notasi D adalah

$$D_x \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{g^2(x)}$$

4. Jika $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$ terdiferensialkan maka turunan trigonometri berikut berlaku.
- $D_x(\sin x) = \cos x$
 - $D_x(\cos x) = -\sin x$
 - $D_x \tan x = \sec^2 x$
 - $D_x \cot x = -\csc^2 x$
 - $D_x \sec x = \sec x \tan x$
 - $D_x \csc x = -\csc x \cot x$

5. Rumus De L'Hospital

Misal pada $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x)$ dan $g(x)$ pada $x = a$ bernilai nol dan diferensiabel maka

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

Dengan $n \in \text{asli } (1,2,3, \dots)$

6. Definisi Aturan Rantai

Misal $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Jika f terdiferensialkan di u dan g terdiferensialkan di x , maka fungsi komposit $f \circ g$ didefinisikan oleh $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ terdiferensialkan di x dan $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Maka

$$D_x (f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

Atau dalam notasi D adalah $D_x y = D_u y D_x u$

Atau dalam notasi Leibniz adalah $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$

7. Turunan tingkat tinggi menyatakan turunan fungsi lebih dari satu kali, untuk menyatakan turunan ke n , $n \in \text{asli}$ pada notasi aksen menggunakan $f^{(n)}(x)$ atau $y^{(n)}$, sementara pada notasi D dan notasi Leibniz masing-masing menggunakan $D_x^n y$ dan $\frac{d^n y}{dx^n}$.

I. Latihan

1. Dengan menggunakan definisi turunan

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Carilah turunan dari

a. $f(x) = 3x^2 + 2$

b. $g(x) = \frac{4}{\sqrt{x-2}}$

2. Dengan menggunakan definisi turunan seperti pada nomor 1 di atas. Buktikan bahwa jika $y = f(x) = \ln x$, maka berlaku $D_x y = \frac{D_x x}{x}$

3. Dapatkan $D_x y$ dari

a. $y = 3x^5 - 4x^3 + x^2 - 7$
 $2 \sin x + 3 \csc x$

b. $y = (x^2 + 3)(x^4 - 5x)$

c. $y = \frac{(3x-1)^5}{4+x^2}$
 $\cos(x^2 - x)$

d. $y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^6$

e. $y = \sqrt{2 + \sqrt{x}}$

f. $y = 4 \tan x -$

g. $y = \frac{1}{3} \csc 3x$

h. $y =$

i. $y = \sin^7(2x^8)$

j. $y = \tan\left(\frac{x^2}{1-x}\right)$

4. Dengan menggunakan rumus De L'Hospital, tentukan

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{8}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} (\csc x - \cot x)$

5. Carilah turunan ke tiga dari

a. $y = \frac{1}{(x+5)^9}$

b. $y = \cos(7x^4)$

BAB IX

INTEGRAL

A. Pendahuluan

Konsep integral sangat berkaitan erat dengan konsep turunan ataupun diferensial pada bab sebelumnya. Keterkaitan tersebut dikarenakan hasil penurunan suatu fungsi terhadap peubah dapat “dibalik” sehingga diperoleh hasil pengintegralannya, demikian pula sebaliknya.

Diharapkan dalam bab ini mahasiswa dapat menguasai konsep integral sebagai anti turunan, integral tak tentu, rumus-rumus dasar integral, integral trogonometri, integral substitusi, integral parsial, dan integral tentu.

B. Integral Sebagai Anti Turunan

Suatu anti turunan dapat dipahami secara sederhana dengan fungsi sebelum diturunkan terhadap suatu peubah, oleh karena itu pada

$$D_x x^7 = 7x^6, x^7 \text{ merupakan anti turunan dari } 7x^6$$

$D_x(x^7 + 1) = 7x^6$, $(x^7 + 1)$ merupakan anti turunan dari $7x^6$

Bagaimanakan untuk $D_x(x^7 + 2)$, apakah masih menghasilkan anti turunan yang sama? jawabannya adalah ya pasti karena anti turunannya terdiri dari suatu bilangan 2. Jika kita perhatikan pada ilustrasi di atas hasil turunannya selalu

sama, namun anti turunannya yang berbeda. Hal ini dikarenakan bilangan konstanta yang terdapat pada anti turunan, sehingga bentuk umum dari anti turunan di atas adalah $x^7 + c$.

Konsisten dengan penggunaan notasi D untuk menyatakan turunan, notasi A dapat digunakan untuk menyatakan suatu anti turunan. Sehingga pada permasalahan di atas menjadi

$$A_x 7x^6 = x^7 + c$$

Notasi A ini jarang digunakan, notasi yang lebih sering digunakan adalah notasi Leibniz yakni $\int \dots dx$, sehingga bentuk di atas menjadi

$$\int 7x^6 dx = x^7 + c$$

Secara umum, apabila $F'(x) = f(x)$, maka dengan menggunakan **notasi Leibniz** berlaku

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

Cara baca notasi di atas adalah integral dari suatu fungsi $f(x)$ terhadap x merupakan $F(x) + c$. Dimana \int adalah tanda integral, sementara $f(x)$ adalah integran.

Dengan menggunakan notasi Leibniz, sekaligus akan mengganti penggunaan istilah anti turunan menjadi **integral tak tentu**. Disebut tak tentu karena selalu ada konstanta pada

setiap kali pengintegrasian dilakukan, pengintegrasian ini disebut juga anti diferensial.

Sifat-sifat Integral Tak Tentu

- a. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$
- b. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- c. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$

C. Rumus Dasar Integral

Rumus dasar integral yang pertama kali kita bahas mengenai aturan pangkat integral tak tentu berbentuk $\int x^n dx$. Tinjaulah bagaimana bentuk integral tak tentu untuk $A_x 7x^6 = x^7 + c$ yang menggunakan notasi Leibniz pada bagian sebelumnya, serta bentuk integral tak tentu untuk $A_x 8x^7 = x^8 + c$ dan $A_x 9x^8 = x^9 + c$. Tentu masing-masing bentuk integral tak tentunya adalah

$$\int 7x^6 dx = x^7 + c$$

$$\int 8x^7 dx = x^8 + c$$

$$\int 9x^8 dx = x^9 + c$$

Secara intuitif pola untuk mendapatkan integral tak tentu di atas adalah pangkat integran selalu bertambah satu, lalu hasil ini dibagi dengan koefisiennya. Sehingga pola

tersebut mengikuti aturan pangkat integral tak tentu sebagai berikut.

Aturan Pangkat Integral Tak Tentu

Apabila n adalah sebarang bilangan rasional, $n \neq -1$, maka

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

Contoh 9.1

Carilah integral tak tentu berikut

1. $\int (3x^6 + 10x - 4) dx$
2. $\int \frac{3x^4 - 2x^5 + 9}{\sqrt[3]{x}} dx$
3. $\int (3x - 1) dx$
4. $\int \left(\frac{3}{x^4} - \frac{7}{x^5} \right) dx$
5. $\int \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x}} dx$

Penyelesaian

1. $\int (3x^6 + 10x - 4) dx = \frac{3}{7} x^7 + 5x^2 - 4x + c$
2. $\int \left(\frac{3x^4 - 2x^5 + 9}{x^2} \right) dx = \int (3x^2 - 2x^3 + 9x^{-2}) dx$
 $= \int 3x^2 dx - \int 2x^3 dx + \int 9x^{-2} dx$
 $= x^3 - \frac{2}{4} x^4 + \left(\frac{9}{-1} \right) x^{-1} + c$
 $= x^3 - \frac{1}{2} x^4 - \frac{9}{x} + c$
3. $\int (3x - 1) dx = \frac{1}{3} \int (3x - 1) d(3x - 1)$
 $= \frac{1}{2} \frac{1}{3} (2x - 1)^2 + c$
 $= \frac{1}{6} (2x - 1)^2 + c$

$$\begin{aligned}
 4. \int \left(\frac{3}{x^4} - \frac{7}{x^5} \right) dx &= \int \frac{3}{x^4} dx - \int \frac{7}{x^5} dx \\
 &= \int 3x^{-4} dx - \int 7x^{-5} dx \\
 &= \frac{3}{-3} x^{-3} - \left(\frac{7}{-4} \right) x^{-4} + c \\
 &= -\frac{1}{x^3} - \frac{7}{4x^4} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \int \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int (2x+1)x^{-3} dx \\
 &= \int (2x^{-2} + x^{-3}) dx \\
 &= \int 2x^{-2} dx + \int x^{-3} dx \\
 &= \left(\frac{2}{-1} \right) x^{-1} + \left(\frac{1}{-2} \right) x^{-2} + c \\
 &= -\frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + c
 \end{aligned}$$

Pada dasarnya rumus dasar integral didapatkan dari “kebalikan” suatu turunan, ingat kembali bagaimana cara menurunkan suatu fungsi pada **BAB TURUNAN**, Misal turunan $\sin x$

$$D_x(\sin x) = \cos x$$

Maka dengan menggunakan notasi Leibniz, integral tak tentunya adalah

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

Rumus-rumus dasar integral tak tentu berikut diperoleh dengan cara yang sama seperti di atas.

1. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
2. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$
3. $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$
4. $\int \cos hx \, dx = \frac{1}{h} \sin hx + c$
5. $\int \sin hx \, dx = -\frac{1}{h} \cos hx + c$
6. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$

Sekarang kita kembangkan rumus dasar **aturan pangkat integral yang lebih umum** melalui aturan rantai turunan suatu fungsi, misal $f(x)$ merupakan fungsi yang dapat didiferensialkan dan r adalah suatu bilangan rasional ($r \neq -1$), maka

$$D_x \left(\frac{(g(x))^{r+1}}{r+1} \right) = (g(x))^r \cdot g'(x)$$

Bentuk integral tak tentunya adalah

$$\int (g(x))^r \cdot g'(x) \, dx = \left(\frac{(g(x))^{r+1}}{r+1} \right) + c$$

Contoh 9.2

Tentukan anti turunan (integral tak tentu) berikut

1. $\int (x^2 + 3x + 1)^{10} (2x + 3) \, dx$
2. $\int \cos 2x \, dx$
3. $\int (1 - 4x)^7 \, dx$
4. $\int \sin^2 x \, dx$

$$5. \int \cos^5 x \, dx$$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} 1. \int (x^2 + 3x + 1)^{10} (2x + 3) \, dx \\ &= \int (x^2 + 3x + 1)^{10} d(x^2 + 3x + 1) \\ &= \frac{1}{11} (x^2 + 3x + 1)^{11} + c \end{aligned}$$

Atau dapat diselesaikan dengan cara berikut

$$\begin{aligned} \text{Misal } x^2 + 3x + 1 = u \text{ maka } d(x^2 + 3x + 1) = du \\ (2x + 3)dx = du \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 3x + 1)^{10} (2x + 3) \, dx &= \int u^{10} \, du \\ &= \frac{1}{11} u^{11} + c \\ &= \frac{1}{11} (x^2 + 3x + 1)^{11} + c \end{aligned}$$

$$2. \int \cos 2x \, dx = \int \cos 2x \frac{d2x}{2} = \frac{1}{2} \int \cos 2x \, d2x = \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

$$\begin{aligned} 3. \int (1 - 4x)^7 \, dx &= \int (1 - 4x)^7 \frac{d(1-4x)}{-4} \\ &= -\frac{1}{4} \int (1 - 4x)^7 d(1 - 4x) \\ &= -\frac{1}{4} \frac{1}{8} (1 - 4x)^8 + c \\ &= -\frac{1}{32} (1 - 4x)^8 + c \end{aligned}$$

$$4. \int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \, dx \quad (\cos 2x = 1 - \sin^2 x)$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad & \int \cos^5 x \, dx \\
 &= \int (\cos^2 x)^2 \cos x \, dx \\
 &= \int (1 - \sin^2 x)^2 d\sin x && (\sin^2 x + \\
 & \cos^2 x = 1) \\
 &= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) d\sin x \\
 &= \int d\sin x - \int 2\sin^2 x \, d\sin x + \int \sin^4 x \, d\sin x \\
 &= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c
 \end{aligned}$$

Dalam integral tak tentu kadang kita dihadapkan pada bentuk $\int \frac{dx}{\sin x}$ atau $\int \frac{dx}{\cos x}$, bagaimanakah rumus mengenai bentuk tersebut?. Perhatikan penyelesaian berikut.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cos\left(\frac{1}{2}x\right)} \quad (\text{rumus jumlah dan}$$

hasil kali trigonometri)

$$= \int \frac{d\left(\frac{1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}} \quad \left(dx = \frac{d\left(\frac{1}{2}x\right)}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \int \frac{d\left(\frac{1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}}$$

$$= \int \frac{d\left(\frac{1}{2}x\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) \tan\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d\left(\tan\left(\frac{1}{2}x\right)\right) \frac{1}{\tan\left(\frac{1}{2}x\right)} \\
&= \ln \tan\left(\frac{1}{2}x\right) + c
\end{aligned}$$

Dengan cara yang serupa, anda bisa mendapatkan

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + c$$

Cobalah sebagai latihan.

D. Teknik Integral Substitusi

Teknik integral ini dilakukan dengan cara memisalkan suatu fungsi menjadi suatu bentuk yang lebih sederhana. Biasanya pemisalan dilakukan pada bentuk fungsi yang rumit. Berikut dijelaskan teknik pengintegralan substitusi pada beberapa bentuk tertentu.

1. Integral yang memuat bentuk $\sqrt[p]{(ax + b)^q}$, p, q bulat

Contoh 9.3

$$\int x \sqrt[3]{x-5} dx$$

Penyelesaian

Substitusi

$$\text{Misal } z = \sqrt[3]{x-5}$$

$$z^3 = x - 5 \quad (\text{kedua ruas dipangkatkan } 3)$$

$$x = z^3 + 5$$

$$dx = 3z^2 dz \quad (\text{kedua ruas diturunkan terhadap peubahnya})$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\int x \sqrt[3]{x-5} dx &= \int (z^3 + 5)z 3z^2 dz \\ &= \int (3z^6 + 15z^3) dz \\ &= \frac{3}{7}z^7 + \frac{15}{4}z^4 + c \\ &= \frac{3}{7}\sqrt[3]{(x-5)^7} + \frac{15}{4}\sqrt[3]{(x-5)^4} + c\end{aligned}$$

2. Integral membuat bentuk akar-akar tidak senama

Contoh 9.4

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + 1)}$$

Penyelesaian

Substitusi

Misal $z = \sqrt[6]{x} \leftrightarrow z^6 = x$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + 1)} &= \int \frac{6z^5 dz}{(z^6)^{\frac{1}{2}} \left((z^6)^{\frac{1}{3}} + 1 \right)} \\ &= \int \frac{6z^5 dz}{z^3(z^2 + 1)} \\ &= \int \frac{6z^2 dz}{(z^2 + 1)} \quad \left(\frac{6z^2}{(z^2 + 1)} \right. \\ &= 1 - \frac{1}{z^2 + 1} \left. \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int 6 \left(1 - \frac{1}{z^2 + 1} \right) dz \\
&= 6 \int dz - 6 \int \left(\frac{1}{z^2 + 1} \right) dz \\
&= 6z - 6 \operatorname{arc} \operatorname{tg} z + c \\
&= 6\sqrt[6]{x} - 6 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt[6]{x}) + c
\end{aligned}$$

3. Integral membuat bentuk $\sqrt{a^2 + x^2}$

Pada Integral yang memuat bentuk ini dilakukan substitusi

$$x = a \tan t,$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2 + x^2} &= \sqrt{a^2 + (a \tan t)^2} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2 t)} \\
&= \sqrt{a^2 \sec^2 t} = a \sec t
\end{aligned}$$

dan

$$dx = a \frac{1}{\cos^2 t} dt = a \sec^2 t dt$$

Contoh 9.5

$$\int x \sqrt{x^2 + 9} dx$$

Penyelesaian

Substitusi $x = 3 \tan t$, sehingga $\sqrt{x^2 + 9} = 3 \sec t$ dan

$$dx = 3 \frac{1}{\cos^2 t} dt$$

maka

$$\begin{aligned}
\int x \sqrt{x^2 + 9} dx &= \int 3 \tan t \cdot 3 \sec t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt \\
&= \int 9 \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 9 \int \frac{\sin t}{\cos^4 t} dt \\
&= 9 \int \frac{-d(\cos t)}{\cos^4 t} \quad (-d(\cos t) \\
&\qquad\qquad\qquad = -1 \cdot -\sin t dt \\
&\qquad\qquad\qquad = \sin t dt) \\
&= -9 \int \cos^{-4} t d(\cos t) \\
&= -9 \frac{1}{-3} \cos^{-3} t + c \\
&= 3 \sec^3 t + c \\
&= 3 \left(\frac{1}{3} \sqrt{x^2 + 9} \right)^3 \\
&\qquad\qquad\qquad + c \quad (\sec t \\
&\qquad\qquad\qquad = \frac{1}{3} \sqrt{x^2 + 9}) \\
&= \frac{1}{9} (x^2 + 9) \sqrt{x^2 + 9} + c
\end{aligned}$$

4. Integral membuat bentuk $\sqrt{a^2 - x^2}$

Pada Integral yang memuat bentuk ini dilakukan substitusi

$$x = a \sin t,$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} \\
&= \sqrt{a^2 \cos^2 t} = a \cos t
\end{aligned}$$

dan

$$dx = a \cos t dt$$

Contoh 9.6

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx$$

Penyelesaian

Substitusi $x = \sin t$, sehingga $\sqrt{1-x^2} = 1 \cdot \cos t = \cos t$
dan $dx = \cos t dt$

maka

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{3x} dx &= \int \frac{\cos t}{3\sin t} \cos t dt \\ &= \int \frac{\cos^2 t}{3\sin t} dt \\ &= \int \frac{(1 - \sin^2 t)}{3\sin t} dt && (\sin^2 t \\ & && + \cos^2 t) \\ &= \int \frac{1}{3\sin t} dt - \int \frac{\sin t}{3} dt \\ &= \frac{1}{3} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} t \right) + \frac{1}{3} \cos t + c \\ &= \frac{1}{3} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin x \right) + \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

5. Integral membuat bentuk $\sqrt{x^2 - a^2}$

Pada Integral yang memuat bentuk ini dilakukan substitusi

$$x = a \sec t,$$

sehingga

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{(a \sec t)^2 - (a)^2} = \sqrt{a^2(\sec^2 t - 1)} \\ &= \sqrt{a^2 \tan^2 t} = a \tan t \end{aligned}$$

dan

$$dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt = a \sec t \tan t dt$$

Contoh 9.7

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 16}}$$

Penyelesaian

Substitusi $x = 4 \sec t$, sehingga $\sqrt{x^2 - 16} = 4 \tan t$ dan

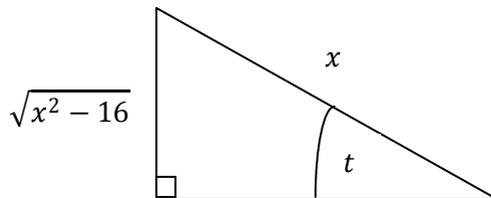
$$dx = 4 \sec t \tan t dt,$$

maka

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 16}} &= \int \frac{4 \sec t \tan t dt}{(4 \sec t)^2 4 \tan t} \\ &= \int \frac{dt}{16 \sec t} \\ &= \int \frac{1}{16} \cos t dt \\ &= \frac{1}{16} \sin t + c \\ &= \frac{1}{16} \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x} + c \end{aligned}$$

Perhatikan bagaimana mendapatkan $\sin t = \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x}$?

Ingat bahwa $x = 4 \sec t$ dengan $0 \leq t \leq 360^\circ$



Sehingga untuk mendapatkan nilai $\sin t$ dapat menggunakan bantuan segitiga siku-siku seperti di atas.

E. Integral Parsial

Cara substitusi terkadang tidak dapat digunakan dalam integral tak tentu yang berbentuk $\int f(x) = F(x) + c$, apabila demikian cara parsial pada integral atau yang seringkali disebut integral parsial dapat dipakai. Bagaimanakah rumus integral parsial? Kita dapat mencarinya melalui aturan hasil kali turunan sebagai berikut.

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdeferensiasikan, maka berlaku

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Akan lebih mudah, dimisalkan terlebih dahulu $u = f(x)$ dan $v = g(x)$

$$d(u \cdot v) = u dv + v du$$

Dengan mengintegrasikan ke dua ruas diperoleh

$$\int d(u \cdot v) = \int u dv + \int v du$$

$$u \cdot v = \int u dv + \int v du$$

Sehingga

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Jadi jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka rumus integral parsial adalah

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Prinsip penggunaan rumus ini adalah kita harus memilih manakah fungsi yang dimisalkan menjadi u dan dv , sehingga mendapatkan du . Ciri permisalan yang salah akan mengakibatkan proses pengintegralan $\int v du$ tidak menemukan penyelesaian atau menemukan integral lain yang tidak ada habisnya.

Contoh 9.8

Carilah integral berikut

1. $\int x \sin x \, dx$
2. $\int \ln x \, dx$

Penyelesaian

1. Misal $u = x \leftrightarrow du = dx$

$$dv = \sin x \, dx = -d(\cos x) \leftrightarrow v = \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= \int -x \, d(\cos x) \\ &= -x \cos x - \int -\cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + c \end{aligned}$$

2. Misal $u = \ln x \leftrightarrow du = \frac{dx}{x}$

$$dv = dx \leftrightarrow v = x$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= (\ln x)(x) - \int x \left(\frac{dx}{x}\right) \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + c\end{aligned}$$

F. Integral Tentu

Berbeda dengan integral tak tentu, integral tentu tidak memuat konstanta karena integral tentu memiliki batas bawah dan batas atas.

Jika $f(x)$ adalah fungsi terdiferensiasikan, $F(x)$ adalah hasil integral, serta a dan b masing-masing adalah batas bawah dan batas atas, maka bentuk integral tentu adalah

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Dalam menghitung integral tentu di atas, harus mencari integral tak tentu $F(x)$ terlebih dahulu, setelahnya substitusi $x = a$ dan $x = b$ sehingga mendapatkan $F(a)$ dan $F(b)$. Nilai integral tentu ditentukan dengan selisih $F(b)$ dengan $F(a)$.

Sifat-sifat Integral Tentu

1. $\int_a^b f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
4. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^b [kf(x)]dx = k \int_a^b f(x)dx$

Contoh 9.9

Hitunglah integral tentu berikut

1. $\int_1^2 (x - 3)dx$
2. $\int_0^1 (x^2 - 4x + 1)dx = 0$

Penyelesaian

1.
$$\begin{aligned} \int_1^5 (x - 3)dx &= [x^2 - 3x]_1^5 \\ &= [(2^5 - 3.5) - (5^2 - 3.5)] \\ &= [(17) - (10)] = 7 \end{aligned}$$
2.
$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^2 - 4x + 1)dx &= [x^3 - 2x^2 + x]_{-1}^1 \\ &= [(1^3 - 2.1^2 + 1) \\ &\quad - ((-1)^3 - 2(-1)^2 \\ &\quad + (-1))] \\ &= [(0) - (-4)] = 4 \end{aligned}$$

G. Rangkuman

1. Jika $F'(x) = f(x)$, maka berlaku integral tak tentu (anti turunan)

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

2. Sifat-sifat Integral Tak Tentu

- a. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$
- b. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- c. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$

3. Aturan pangkat Integral Tak Tentu

Apabila n adalah sebarang bilangan rasional, $n \neq -1$, maka

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

4. Rumus-rumus dasar integral tak tentu

- a. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- b. $\int \cos x dx = \sin x + c$
- c. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
- d. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$
- e. $\int \cos hx dx = \frac{1}{h} \sin hx + c$
- f. $\int \sin hx dx = -\frac{1}{h} \cos hx + c$
- g. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$

5. Teknik integral substistusi dilakukan dengan cara memisalkan suatu fungsi menjadi suatu bentuk yang lebih sederhana, biasanya pemisalan dilakukan pada bentuk fungsi yang rumit.

6. Jika $f(x)$ dan $g(x)$ fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, serta $f(x) = u$ dan $g(x) = v$, maka rumus integral parsial dalam u dan v adalah

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

7. Jika $f(x)$ adalah fungsi terdiferensiasikan, $F(x)$ adalah hasil integral, serta a dan b masing-masing adalah batas bawah dan batas atas, maka bentuk integral tentu adalah

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

8. Sifat-sifat Integral Tentu

- a. $\int_a^b f(x) dx = 0$
- b. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
- c. $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$
- d. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- e. $\int_a^b [kf(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx$

H. Latihan

1. Tentukan integral tak tentu berikut ini

- | | |
|---|--------------------------------|
| a. $\int (2x^3 - \frac{3}{2}x - 10) dx$ | c. $\int (x^2 - 4)^3 + x^3 dx$ |
| b. $\int \frac{x^2 - 2\sqrt[3]{x} + 8}{\sqrt[5]{x}} dx$ | d. $\int (x - 5) dx$ |

2. Carilah antiturunan berikut

- a. $\int (x^2 - 7x + 4)^{10} (2x - 7) dx$
- b. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$

c. $\int \cos(4x - 3) dx$

d. $\int \sin^4 x dx$

e. $\int \frac{xdx}{x^2+a^2} dx$

3. Tentukan integral-integral di bawah ini

a. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-3x}} dx$

d.

$\int x\sqrt{16x^2 - 1} dx$

b. $\int \frac{\sqrt[6]{2x-4}}{1+\sqrt{2x-4}} dx$

e. $\int \frac{t}{\sqrt{25-t^2}} dt$

c. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx$

4. Carilah integral di bawah ini

a. $\int x \cos x dx$

c. $\int \ln 4x dx$

b. $\int x \sin x \cos^2 x dx$

d. $\int \ln^2 x dx$

5. Hitunglah

a. $\int_0^1 (4 - x) dx$

b. $\int_{-3}^2 (x^3 - 2x) dx$

6. Diketahui $f(x) = \int_0^x (t^4 + 1) dt$

a. Tentukan nilai x

b. Carilah $f(-1)$

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard. 1987. *Aljabar Linier Elementer Edisi Kelima*. Erlangga: Jakarta.
- Bumolo, H. dan Musinto, D. 2012. *Matematika Bisnis untuk Ekonomi dan Aplikasinya Edisi 7*. Bayumedia Publishing: Malang.
- Bush, G. A. 1973. *Foundations of Mathematics with Application to the Social and Management Sciences*. San Francisco: McGraw-Hill Book Company.
- Devine, D. F. and Kaufmann J. E. 1983. *Elementary Mathematics for Teachers*. Canada: John Wiley & Sons.
- Heri, Roberto. 2005. *Buku Ajar Kalkulus I*. Undip Press: Semarang.
- Kusmartono dan Rawuh. 1983. *Matematika Pendahuluan*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Leithold dan Hutahaean. 1992. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik : Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Lipschutz, S. 1981. *Set Theory and Related Topics*. Singapore: McGraw-Hill International Book Company.
- Lipschutz, S., Hall, G. G., dan Margha. 1988. *Matematika Hingga*. Jakarta: Erlangga.
- Moesono, Djoko. 1988. *Kalkulus I*. Unesa University Press: Surabaya.
- Purcell, E.J. dan Verberg, D. 1995. *Kalkulus dan Geometri Analitis : Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Rachmad, 2004, *Relasi dan Fungsi*, p4tk matematika, Yogyakarta.

Ruseffendi, E. T. 1989. *Dasar-dasar Matematika Modern dan Komputer untuk Guru*. Bandung: Tarsito.

Ruseffendi. 2005. *Dasar-dasar Matematika Modern dan Komputer*. Tarsito, Bandung.

Suherman, E. 1991. *Perkenalan dengan Teori Himpunan*. Bandung: Wiyakusumah.

Sukirman, 2006, *Matematika*, Universitas Terbuka, Jakarta.

Wheeler, R. E. 1984. *Modern Mathematics : An Elementary Approach*. California: Wadsworth, Inc.

Zuckerman, M.M., 1985, *College Algebra*, John Willey and Sons, New York.

INDEKS MATERI

A

- Aturan Fungsi Identitas 83
- Aturan Fungsi Konstanta 83
- Aturan Hasil Bagi 84
- Aturan Hasil Kali 84
- Aturan Jumlah 83
- Aturan Kelipatan Konstanta 83
- Aturan Pangkat 83
- Aturan Pangkat Integral Tak Tentu 94
- Aturan Pangkat Integral yang Lebih Umum 96
- Aturan Rantai 87
- Aturan Selisih 83
- Aturan-aturan Turunan 82

B

- Bentuk Akar 9
- Bentuk Pangkat Bulat 6
- Bentuk Pangkat, Akar dan Logaritma 6
- Bijektif (Korespondensi Satu-satu) 45

C

- Cara Pencirian / Deskriptif 20
- Cara Tabulasi 19

D

- De L'Hospital 86
- Determinan 63
- Diagram Venn 21

F

- Fungsi Identitas 47
- Fungsi Konstan 46
- Fungsi Kuadrat 51
- Fungsi Linear 47

G

- Gabungan (*Union*) 27
- Gradien 49

H

- Himpunan Bagian 23
- Himpunan Bersilangan 25
- Himpunan Bilangan 4
- Himpunan Ekuivalen 25
- Himpunan kosong 21
- Himpunan Kuasa (*Power Set*) 25
- Himpunan Lepas 24
- Himpunan Semesta 22
- Himpunan yang sama 23
- Hubungan Gradien dari Dua Garis 50

I

- Injektif (Satu-satu) 44
- Integral Parsial 101
- Integral Sebagai Anti Turunan 93

Integral Tentu 103

Invers Matriks 66

Irisan (*Intersection*) 26

J

Jenis Fungsi 46

Jenis-Jenis Matriks 58

K

Keanggotaan Himpunan dan Bilangan Kardinal 19

Kekontinuan 78

Komplemen 28

L

Limit Bentuk Tak Tentu 74

Limit Bentuk Trigonometri 77

Limit Tentu 74

Logaritma 12

M

Macam-macam Himpunan 21

Matriks Baris 58

Matriks Bujur Sangkar 59

Matriks Diagonal 59
Matriks Identitas 59
Matriks Kolom 58
Matriks Negatif 58
Matriks Nol 58
Matriks Simetris 59
Matriks Singular 59
Matriks Skalar 59
Matriks Transpose 59
Menentukan Persamaan Garis melalui Dua Titik 50
Menentukan Persamaan Garis melalui Satu Titik dan gradien m 49
Menentukan Titik Potong antara Dua Garis 50
Merasionalkan Pecahan Bentuk Akar 10

N
Nilai Mutlak 72

O
Operasi dan Sifat-sifat Matriks 60
Operasi Himpunan 26

P
Pangkat Bulat Negatif dan Nol 8
Pangkat Pecahan 11
Pengertian Fungsi 43
Pengertian Himpunan 17
Pengertian Limit 72
Pengertian Matriks 57
Pengertian Turunan 81
Pengurangan matriks 61
Penjumlahan matriks 60
Penulisan Himpunan 19
Perkalian matriks dengan matriks 62
Perkalian skalar dengan matriks 61
Perpangkatan matriks 63
Persamaan dan Pertidaksamaan Nilai Mutlak 73
Persamaan Ekuivalen 37
Persamaan Linear Bentuk Pecahan Satu Variabel 37
Persamaan Linear Satu Variabel 35

Pertidaksamaan Linear Bentuk Pecahan Satu Variabel 40

Pertidaksamaan Linear Satu Variabel 38

Prinsip Penjumlahan dan Perkalian 36

R

Relasi antar Himpunan 23

Rumus Dasar Integral 94

S

Selisih Himpunan 28

Sifat Fungsi 44

Sifat-sifat Integral Tak Tentu 94

Sifat-sifat Integral Tentu 103

Sifat-Sifat Limit 73

Sifat-sifat Logaritma 12

Sifat-sifat Operasi pada Himpunan 29

Sifat-sifat Pangkat Bulat Positif 7

Sifat-sifat Pangkat Pecahan 11

Simbol-simbol Baku 20

Sumbu Simetri 51

Surjektif (Onto) 45

T

Teknik Integral Substitusi 98

Titik Puncak 51

Turunan Tingkat Tinggi 89

Turunan Trigonometri 85

BIODATA PENULIS



Mohammad Faizal Amir, lahir di Sidoarjo, Jawa Timur pada tanggal 17 September 1989. Pendidikan S1 bidang Pendidikan Matematika ditempuh di prodi pendidikan matematika FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, pada tahun 2007. Selanjutnya penulis menempuh pendidikan S2, juga pada prodi pendidikan matematika, Pascasarjana Universitas Negeri Surabaya, pada tahun 2011. Penulis aktif mengajar di Universitas Muhammadiyah Sidoarjo mulai tahun 2012. Penulis juga aktif melakukan tridarma, dalam bidang pengajaran, mata kuliah yang pernah diampu diantaranya adalah **matematika dasar**, matematika ekonomi, konsep dasar matematika, statistika dasar, dan pendidikan matematika sekolah dasar kelas tinggi. Selain itu penulis juga pernah menjadi dosen pembina ON MIPA UMSIDA bidang matematika tahun 2014 dan tahun 2015. Kegiatan pengembangan diri yang dilakukan yakni mengikuti workshop ataupun pelatihan pendidikan matematika tingkat regional ataupun nasional. Bidang keahlian khusus penelitian pendidikan matematika berorientasi *HOTS* pada hibah penelitian dikti atau internal Institusi dan Mandiri. Bidang pengabdian masyarakat dilakukan dengan menjadi pembicara workhsop ataupun lokakarya pendidikan, serta pernah menjadi juri dalam lomba pendidikan tingkat regional ataupun nasional.



Bayu Hari Prasajo, lahir di Pasuruan, Jawa Timur pada tanggal 27 Maret 1981. Gelar Sarjana Sains (S.Si) diperoleh dari Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Brawijaya Malang, jurusan Matematika, pada tahun 2003. Penulis mulai mengajar di FKIP STKIP PGRI Pasuruan sebagai

dosen luar biasa pada tahun 2004 sampai 2008. Kemudian pada tahun 2006 sampai 2013 penulis mengajar di SMA Al Irsyad Surabaya sebagai Guru Matematika dan juga pada tahun 2013 sampai 2015 di SMP Insan Cendekia Mandiri Sidoarjo. Selanjutnya, pada tahun 2010 penulis mengikuti Program Pascasarjana (S-2) di Universitas Negeri Surabaya (Unesa), pada Program Studi Pendidikan Matematika dan meraih gelar Magister Pendidikan (M.Pd). Kemudian, pada tahun 2015 sampai sekarang penulis diangkat sebagai dosen tetap di Fakultas Ekonomi dan Bisnis (FEB) Universitas Muhammadiyah Sidoarjo (UMSIDA). Mata kuliah yang diajarkan penulis di program S-1 adalah Matematika Bisnis, Pengantar Statistik, Statistik 2 dan Statistik Bisnis. Aktif juga melakukan penelitian dan pengabdian masyarakat sebagai kewajiban tridarma perguruan tinggi.